

§5. 線形写像

ここでは、線形写像に関する基本的事項について簡単に述べておこう。

定義 U, V をベクトル空間、 f を U から V への写像とする。 f は次の (1), (2) をみたすとき、線形写像という。

- (1) 任意の $u, v \in U$ に対して $f(u+v) = f(u) + f(v)$.
- (2) 任意の $c \in \mathbf{R}$ および任意の $u \in U$ に対して $f(cu) = cf(u)$.

上の (2) より、線形写像は零ベクトルを零ベクトルへ写すことが分かる。

また、すべてのベクトルを零ベクトルへ写す写像は上の (1), (2) をみたすから、線形写像となる。これを零写像という。

例 $m \times n$ 行列 A を固定しておき、 \mathbf{R}^n から \mathbf{R}^m への写像 f_A を行列の積を用いて、

$$f_A(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める。

このとき、 f_A は上の (1), (2) の性質をみたすことが分かるから、線形写像となる。

実は、 \mathbf{R}^n から \mathbf{R}^m への線形写像はすべて上の例のようにして得られる。

命題 f を \mathbf{R}^n から \mathbf{R}^m への線形写像とする。このとき、ある $m \times n$ 行列 A が存在し、

$$f(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

と表される。

証明 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$ をそれぞれ $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ の標準基底とする。

このとき、各 $j = 1, 2, \dots, n$ に対して $f(e_j)$ を e'_1, e'_2, \dots, e'_m の 1 次結合で

$$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + a_{2j}e'_2 + \dots + a_{mj}e'_m \quad (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj} \in \mathbf{R})$$

と表すことができる。

よって、 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ として、線形写像の性質を用いると、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_n e_n) \\ &= x_1(a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \dots + a_{m1}e'_m) + x_2(a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \dots + a_{m2}e'_m) + \dots \\ &\quad + x_n(a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \dots + a_{mn}e'_m) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって、 (i, j) 成分が a_{ij} の $m \times n$ 行列を A とおけばよい。 □

ベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像 f に対して、 $f(U), f^{-1}(\{0\})$ をそれぞれ $\text{Im } f, \text{Ker } f$ と表すことが多い。また、 $f^{-1}(\{0\})$ を f の核ともいう。

f の像および核について次がなりたつ.

定理 $\text{Im}f$ は V の部分空間.

$\text{Ker}f$ は U の部分空間.

以下ではベクトル空間は有限次元であるとする.

f をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像, $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ をそれぞれ U, V の基底とする. このとき, $m \times n$ 行列 A を用いて,

$$(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) = (v_1, v_2, \dots, v_m)A$$

と表すことができる. v_1, v_2, \dots, v_m は 1 次独立だから, このような A は一意的に定まる. A を基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ に関する f の表現行列という.

次の例から分かるように, 上の例において扱った行列 A の定める自然な線形写像 f_A の表現行列は標準基底に関しては A そのものとなる.

例 A を (i, j) 成分が a_{ij} の $m \times n$ 行列とし, \mathbf{R}^n から \mathbf{R}^m への線形写像 f_A を

$$f_A(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める.

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$ をそれぞれ $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ の標準基底とすると,

$$\begin{aligned} (f_A(e_1), f_A(e_2), \dots, f_A(e_n)) &= \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right) \\ &= (e'_1, e'_2, \dots, e'_m)A. \end{aligned}$$

よって, $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ の標準基底に関する f_A の表現行列は A .

表現行列は基底に依存するものである. まず, 基底の取り替えを行列を用いて表してみよう.

V を n 次元のベクトル空間とする. V の基底を 1 組選んでおき, $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ とする.

基底の定義より, V の任意のベクトル x は

$$x = x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n \quad (x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R})$$

と一意的に表される. x_1, x_2, \dots, x_n を基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ に関する x の成分という.

例 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ を \mathbf{R}^n の標準基底とし, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ とする. このとき,

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$$

だから, 標準基底 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ に関する x の成分は x_1, x_2, \dots, x_n である.

n 次元ベクトル空間 V の基底を 2 組選んでおき, $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ とする.

各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して, 基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ に関する v_i の成分を $p_{1i}, p_{2i}, \dots, p_{ni}$ とし, p_{ij} を (i, j) 成分とする n 次の正方行列を P とおくと,

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n)P$$

と表すことができる. P を基底変換 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ の基底変換行列という. 基底変換行列は正則行列で, 1つの基底変換に対して一意に定まることが分かる.

逆に, P を始めに選んでおき, 上の式で v_1, v_2, \dots, v_n を定めることができる.

では, 基底変換によって表現行列がどのように変わるのかを見てみよう.

定理 f をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像, $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$ を U の基底, P を基底変換 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \rightarrow \{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$ の基底変換行列, $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}, \{v'_1, v'_2, \dots, v'_m\}$ を V の基底, Q を基底変換 $\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \rightarrow \{v'_1, v'_2, \dots, v'_m\}$ の基底変換行列, A を基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ に関する f の表現行列, B を基底 $\{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}, \{v'_1, v'_2, \dots, v'_m\}$ に関する f の表現行列とする. このとき,

$$B = Q^{-1}AP.$$

証明 P の (i, j) 成分を p_{ij} とおき, 定義に従って計算すると,

$$\begin{aligned} & (f(u'_1), f(u'_2), \dots, f(u'_n)) \\ &= (f(p_{11}u_1 + p_{21}u_2 + \dots + p_{n1}u_n), \dots, f(p_{1n}u_1 + p_{2n}u_2 + \dots + p_{nn}u_n)) \\ &= (p_{11}f(u_1) + p_{21}f(u_2) + \dots + p_{n1}f(u_n), \dots, p_{1n}f(u_1) + p_{2n}f(u_2) + \dots + p_{nn}f(u_n)) \\ &= (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))P \\ &= (v_1, v_2, \dots, v_m)AP. \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned} (f(u'_1), f(u'_2), \dots, f(u'_n)) &= (v'_1, v'_2, \dots, v'_m)B \\ &= (v_1, v_2, \dots, v_m)QB. \end{aligned}$$

よって,

$$(v_1, v_2, \dots, v_m)AP = (v_1, v_2, \dots, v_m)QB.$$

v_1, v_2, \dots, v_m は 1 次独立だから,

$$AP = QB.$$

基底変換行列は正則だから,

$$B = Q^{-1}AP.$$

□

ベクトル空間 U の線形変換, すなわち U から U 自身への線形写像に対して, U の基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ に関する表現行列を単に基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ に関する表現行列ということにする. 上の定理を線形変換の場合に適用すると, 次が得られる.

定理 f をベクトル空間 U の線形変換, $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$ を U の基底, P を基底変換 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \rightarrow \{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$ の基底変換行列, A を基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ に関する f の表現行列, B を基底 $\{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$ に関する f の表現行列とする. このとき,

$$B = P^{-1}AP.$$

問題 5

1. U, V, W をベクトル空間, f を U から V への線形写像, g を V から W への線形写像とする. このとき, 合成写像 $g \circ f$ は線形写像であることを示せ.
2. f をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像とする. $\text{Ker } f = \{0\}$ であることと f が単射であることは同値であることを示せ.
3. f, g をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像とし, $c \in \mathbf{R}$ とする. このとき, U から V への写像 $f + g, cf$ をそれぞれ

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u), \quad (cf)(u) = cf(u) \quad (u \in U)$$

により定めると, $f + g, cf$ は線形写像となり, U から V への線形写像全体はベクトル空間となることが分かる.

$\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ をそれぞれ U, V の基底, A, B をそれぞれ基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ に関する f, g の表現行列とする. 基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ に関する $f + g, cf$ の表現行列を求めよ.

4. U, V, W をベクトル空間, f を U から V への線形写像, g を V から W への線形写像とする. $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}, \{w_1, w_2, \dots, w_l\}$ をそれぞれ U, V, W の基底, A を基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ に関する f の表現行列, B を基底 $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}, \{w_1, w_2, \dots, w_l\}$ に関する g の表現行列とする.
 - (1) 基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{w_1, w_2, \dots, w_l\}$ に関する合成写像 $g \circ f$ の表現行列を求めよ.
 - (2) f が全単射であるとき, f の逆写像 f^{-1} は V から U への線形写像で, $m = n$ となることが分かる. このとき, f を同型写像といい, U と V は同型であるという.
 f が同型写像のとき, 基底 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ に関する f^{-1} の表現行列を求めよ.
5. $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ を n 次元ベクトル空間 V の基底, P, Q をそれぞれ基底変換 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rightarrow \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ の基底変換行列とする. 基底変換 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \rightarrow \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ の基底変換行列を求めよ.

問題5の解答

1. まず, $u, v \in U$ とすると,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(u + v) &= g(f(u + v)) \\ &= g(f(u) + f(v)) \\ &= g(f(u)) + g(f(v)) \\ &= (g \circ f)(u) + (g \circ f)(v).\end{aligned}$$

次に, $c \in \mathbf{R}, u \in U$ とすると,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(cu) &= g(f(cu)) \\ &= g(cf(u)) \\ &= cg(f(u)) \\ &= c(g \circ f)(u).\end{aligned}$$

よって, $g \circ f$ は線形写像.

2. まず, $\text{Ker } f = \{0\}$ であると仮定する.

$u, v \in V$ が

$$f(u) = f(v)$$

をみたすとする, f は線形写像だから,

$$f(u - v) = 0.$$

仮定より,

$$u - v = 0.$$

すなわち,

$$u = v.$$

よって, f は単射.

逆に, f が単射であると仮定する.

$u \in \text{Ker } f$ とすると,

$$\begin{aligned}f(u) &= 0 \\ &= f(0).\end{aligned}$$

仮定より,

$$u = 0.$$

よって,

$$\text{Ker } f = \{0\}.$$

3. まず,

$$\begin{aligned}(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) &= (v_1, v_2, \dots, v_m)A, \\ (g(u_1), g(u_2), \dots, g(u_n)) &= (v_1, v_2, \dots, v_m)B\end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned}
 & ((f+g)(u_1), (f+g)(u_2), \dots, (f+g)(u_n)) \\
 &= (f(u_1) + g(u_1), f(u_2) + g(u_2), \dots, f(u_n) + g(u_n)) \\
 &= (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) + (g(u_1), g(u_2), \dots, g(u_n)) \\
 &= (v_1, v_2, \dots, v_m)A + (v_1, v_2, \dots, v_m)B \\
 &= (v_1, v_2, \dots, v_m)(A+B).
 \end{aligned}$$

よって, 基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ に関する $f+g$ の表現行列は $A+B$.
また,

$$\begin{aligned}
 ((cf)(u_1), (cf)(u_2), \dots, (cf)(u_n)) &= (cf(u_1), cf(u_2), \dots, cf(u_n)) \\
 &= c(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) \\
 &= c(v_1, v_2, \dots, v_m)A \\
 &= (v_1, v_2, \dots, v_m)(cA).
 \end{aligned}$$

よって, 基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ に関する cf の表現行列は cA .

4. (1) A の (k, i) 成分を a_{ki} , B の (j, k) 成分を b_{jk} とすると, $i = 1, 2, \dots, n$ のとき,

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(u_i) &= g(f(u_i)) \\
 &= g(a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 + \dots + a_{mi}v_m) \\
 &= \sum_{k=1}^m a_{ki}g(v_k) \\
 &= \sum_{k=1}^m a_{ki} \sum_{j=1}^l b_{jk}w_j \\
 &= \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^m b_{jk}a_{ki}w_j
 \end{aligned}$$

ここで, $\sum_{k=1}^m b_{jk}a_{ki}$ は BA の (j, i) 成分.

よって, 求める表現行列は BA .

(2) 求める表現行列を B とする.

恒等写像に対する表現行列は単位行列となるから, (1) と合わせると, BA, AB はともに n 次単位行列.

よって, $B = A^{-1}$.

5. P, Q はそれぞれ

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n)P, \quad (w_1, w_2, \dots, w_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n)Q$$

により定まるから,

$$(w_1, w_2, \dots, w_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n)PQ.$$

よって, 求める基底変換行列は PQ .