§6. 固有値と対角化

ここでは, 線形変換の固有値や正方行列の対角化について簡単に述べておこう.
f をベクトル空間 V の線形変換とする.
零ベクトルでない $u \in V$ および $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在し,

$$f(u) = \lambda u$$

をみたすとする. このとき, λ を f の固有値, u を固有値 λ に対する f の固有ベクトルという.
固有値 λ に対する f の固有ベクトル全体に零ベクトルを加えた V の部分集合を $W(\lambda)$ と表すことにする. このとき,

$$W(\lambda) = \{u \in V | f(u) = \lambda u\}$$

で, 更に $W(\lambda)$ は V の部分空間となることが分かる. $W(\lambda)$ を固有値 λ に対する f の固有空間という.
まず, 正方行列の定める自然な線形変換の固有値, 固有ベクトルについて考えよう.
A を n 次の正方行列とする. このとき, $\mathbf{R}^n$ の線形変換 f_A を

$$f_A(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定めることができる. f_A の固有値, 固有ベクトル, 固有空間を単にそれぞれ A の固有値, 固有ベクトル, 固有空間という.
λ を A の固有値, x を固有値 λ に対する A の固有ベクトルとすると, 定義より,

$$Ax = \lambda x$$

がなりたつ. E を n 次単位行列とすると, これは

$$(\lambda E - A)x = 0$$

と同値である. すなわち, x は上の同次形の連立１次方程式の自明でない解であるから,

$$|\lambda E - A| = 0$$

がなりたつ.
ここで, t の n 次多項式 $\phi_A(t)$ を

$$\phi_A(t) = |tE - A|$$

により定める. $\phi_A(t)$ を A の特性多項式または固有多項式, n 次方程式 $\phi_A(t) = 0$ を A の特性方程式または固有方程式という.
固有方程式の解は複素数の範囲で考えることができるが, ここでは $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間を考えている. このことに注意すると, 上で観察したことから, 次がなりたつ.

定理　A を正方行列とする. λ が A の固有値であるための必要十分条件は λ が A の固有方程式の実数解であること.

$f(t)$ を t の多項式とし,

$$f(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \quad (a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{R})$$

と表しておく.

A を正方行列とすると, 上の式の右辺の t に A を代入して, 正方行列 $f(A)$ を

$$f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

により定めることができる. ただし, E は A と行および列の数が等しい単位行列である. $f(A)$ を $f(t)$ に対する A の行列多項式という.
正方行列 A に対しては固有多項式 $\phi_A(t)$ が定まるのであった. では, $\phi_A(t)$ に対する A の行列多項式はどうなるのであろうか. 実はこれはどのような A に対しても零行列になってしまうのである. すなわち, 次がなりたつ.

Caley-Hamilton の定理 $\phi_A(A) = O$.

正方行列の定める自然な線形変換に対する固有値や固有ベクトルは, 固有方程式を解くことによって順次求められる. それでは一般の線形変換の場合はどのようにすればよいのであろうか. 以下ではベクトル空間は有限次元であるとして, §5 において扱ったことを思い出してみよう. 線形写像は基底を固定しておけば, 表現行列という行列が対応するのであった. 特に, 線形変換の場合は表現行列は正方行列となる. よって, この表現行列に対して固有方程式を解いていけばよいであろう.
f をベクトル空間 V の線形変換, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ を V の基底, A を基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ に関する f の表現行列とする. f の固有多項式 $\phi_f(t)$ を A の固有多項式 $\phi_A(t)$ を用いて,

$$\phi_f(t) = \phi_A(t)$$

により定める. また, 方程式 $\phi_f(t) = 0$ を f の固有方程式という.

注意 表現行列は基底に依存するものであるから, 本来ならば

$$\phi_{f,\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}}(t) = \phi_A(t)$$

のように記号を定めるべきであろう. しかし, 実は上のように定めた $\phi_f(t)$ は基底の選び方に依存しないのである. 実際, $\{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ を別の V の基底, P を基底変換 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \to \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ の基底変換行列, B を基底 $\{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ に関する f の表現行列とすると,

$$B = P^{-1}AP$$

がなりたつから, 行列式の性質を用いると,

$$\begin{aligned}
\phi_B(t) &= |tE - B| \\
&= |tP^{-1}EP - P^{-1}AP| \\
&= |P^{-1}(tE - A)P| \\
&= |P^{-1}||tE - A||P| \\
&= |tE - A| \\
&= \phi_A(t).
\end{aligned}$$

数学ではこのようなとき, 定義は well-defined であるという.

固有値と固有方程式の解の関係について, 正方行列の場合と全く同様のことがなりたつ.

定理 f をベクトル空間 V の線形変換とする. λ が f の固有値であるための必要十分条件は λ が f の固有方程式の実数解であること.

有限次元ベクトル空間の線形変換は基底を選ぶことにより, 表現行列という正方行列と対応した. 実際の計算では, 表現行列はできるだけ計算しやすい形である方が望ましい. このようなものとしては Jordan 標準形というものが最も一般的であるが, 特別な条件の下ではこれは対角成分以外の成分がすべて 0 の正方行列, すなわち対角行列となる.
線形変換に対する表現行列 A は基底変換により, 正則行列 P を用いて

$$B = P^{-1}AP$$

と変わるのであった. ここでは, 上手く P を選んで B が対角行列となるのはどのようなときであるのかを考えよう. そこで次のように定義する.

定義　A, B を n 次の正方行列とする. n 次の正則行列 P が存在し,

$$B = P^{-1}AP$$

となるとき, A と B は相似であるという.
B が対角行列のとき, A は P によって対角化される, または対角化可能であるという.

注意　問題 3 において扱ったように, 相似という関係は同値関係の例である.
特に, 対角化可能性の問題は, あたえられた正方行列を含む同値類の中で, 代表元として対角行列を選ぶことができるかどうかという問題に言い替えることができる.

さて, A を対角化可能な n 次の正方行列としよう. 定義より, n 次の正則行列 P が存在し,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と表される. すなわち,

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる.
更に, P を

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

と列ベクトルに分割しておくと,

$$Ap_i = \lambda_i p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

となる. ここで, P は正則だから, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ は 1 次独立で, 各 p_i は零ベクトルではない. よって, λ_i は A の固有値で, p_i は固有値 λ_i に対する A の固有ベクトルである.
上の計算は逆に辿ることもできるから, 次が得られたことになる.

定理　A を n 次の正方行列とする. A が対角化可能であるための必要十分条件は n 個の 1 次独立な A の固有ベクトルが存在すること.

次の定理は固有ベクトルまで調べなくても, 固有値のみで対角化可能性が判定できる場合である.

定理　A が n 個の異なる固有値をもつ n 次の正方行列ならば, A は対角化可能.

問題 6

1. f をベクトル空間 V の線形変換とする．m 個の f から得られる合成写像を f^m と表す．例えば, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ である．また, $f^1 = f$ とする．
ある自然数 m に対して f^m が零写像となるならば, f の固有値は 0 のみであることを示せ．

2. 正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

により定める．このとき, A の固有値は $-1, 2, 5$ であることが分かる．A の固有値 -1 に対する固有空間を求めよ．

3. 2 次の正方行列全体からなるベクトル空間 $M_2(\mathbf{R})$ の部分集合 W を

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

により定めると, W は $M_2(\mathbf{R})$ の部分空間となる．また,

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと, $\{E_1, E_2\}$ は W の基底となる．更に, $A \in W$ を固定しておき,

$$f(X) = AX \quad (X \in W)$$

とおくと, f は W の線形変換を定めることが分かる．

(1) 基底 $\{E_1, E_2\}$ に関する f の表現行列を求めよ．
(2) f の固有値を求めよ．

4. 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ を考える．$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を 1 つ求めよ．

問題 6 の解答

1. u を固有値 λ に対する f の固有ベクトルとすると,

$$\begin{aligned} 0 &= f^m(u) \\ &= f^{m-1}(f(u)) \\ &= f^{m-1}(\lambda u) \\ &= \lambda f^{m-1}(u) \\ &= \cdots \\ &= \lambda^m u. \end{aligned}$$

$u \neq 0$ だから,

$$\lambda^m = 0.$$

すなわち,

$$\lambda = 0.$$

2. 連立 1 次方程式

$$(-E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

を考える.
$-E - A$ の行に関する基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行} \times \left(-\frac{1}{2}\right)]{\text{第 1 行} \times \left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行} + \text{第 1 行} \times 2}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行} + \text{第 3 行}]{\text{第 1 行} - \text{第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行の入れ替え}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって,

$$x_1 - 2x_3 = 0,\ x_2 + 2x_3 = 0$$

だから,

$$x_1 = 2c,\ x_2 = -2c,\ x_3 = c \quad (c \in \mathbf{R}).$$

したがって,

$$W(-1) = \left\{ c\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbf{R} \right\}.$$

3. (1) $A = aE_1 + bE_2$ と表しておくと,

$$\begin{aligned}(f(E_1), f(E_2)) &= ((aE_1 + bE_2)E_1, (aE_1 + bE_2)E_2) \\ &= (aE_1 + bE_2, bE_1 + aE_2) \\ &= (E_1, E_2)A.\end{aligned}$$

よって, 求める表現行列は A に一致する.

(2) f の固有多項式は

$$\begin{aligned}\phi_f(t) &= \phi_A(t) \\ &= \begin{vmatrix} t-a & -b \\ -b & t-a \end{vmatrix} \\ &= (t-a)^2 - b^2.\end{aligned}$$

よって, f の固有値は $a \pm b$.

4. まず, A の固有多項式は

$$\begin{aligned}\phi_A(t) &= \begin{vmatrix} t-1 & -3 \\ -2 & t-2 \end{vmatrix} \\ &= (t-1)(t-2) - (-3)(-2) \\ &= (t+1)(t-4).\end{aligned}$$

よって, A は 2 個の異なる固有値 $-1, 4$ をもつから, 対角化可能.

次に, 固有値 -1 に対する A の固有ベクトルを求める.

連立 1 次方程式

$$(-E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

を考えると,

$$-2x_1 - 3x_2 = 0.$$

よって, ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ は固有値 -1 に対する A の固有ベクトル.

更に, 固有値 4 に対する A の固有ベクトルを求める.

連立 1 次方程式

$$(4E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

を考えると,

$$-2x_1 + 2x_2 = 0.$$

よって, ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 4 に対する A の固有ベクトル.

したがって,

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと, P は正則で,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$