§7. 群

幾何学に限らず, 数学の様々な場面において現れる最も基本的な代数的対象の１つとして, 群というものを挙げることができる.

定義 G を集合とし, $a, b, c \in G$ とする. G に積という演算

$$ab \in G$$

が定められ, 次の (1)〜(3) がなりたつとき, G を群という.

(1) $(ab)c = a(bc)$ (結合律).
(2) ある $e \in G$ が存在し, 任意の a に対して $ae = ea = a$.
(3) 任意の a に対して, ある $a' \in G$ が存在し, $aa' = a'a = e$.

e を G の単位元という. また, a' を a の逆元という.

定理 単位元, 逆元は一意的.

証明 G を群とする.
まず, e, e' をともに G の単位元とすると,

$$\begin{aligned} e' &= e'e \\ &= e \end{aligned}$$

だから, 単位元は一意的である. ここで, 最初の等号では e を単位元とみなし, 次の等号では e' を単位元とみなした.
次に, $a \in G$ とする.
a', a'' をともに a の逆元とすると,

$$\begin{aligned} a'' &= ea'' \\ &= (a'a)a'' \\ &= a'(aa'') \\ &= a'e \\ &= a'. \end{aligned}$$

よって, 逆元は一意的である. □

a の逆元は a^{-1} と表すことが多い.

定義 群の元の個数を位数という.
位数が有限, 無限の群をそれぞれ有限群, 無限群という.
群 G は交換律をみたすとき, すなわち, 任意の $a, b \in G$ に対して

$$ab = ba$$

がなりたつとき, 可換群または Abel 群という.

なお, Abel 群は積の記号として $+$ を用いるとき, 加法群ともいう. このとき, 単位元は 0 と表し, a の逆元は $-a$ と表す.
一方, Abel 群の積をそのまま積の形で表す場合は乗法群ともいう.

例 (単位群)
単位元のみからなる群を考えることができる.
これを単位群という.
単位群は位数 1 の Abel 群である.

例 G を $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ の何れかとする.
このとき, G は通常の和 $+$ に関して無限加法群となる.

例 G を $\mathbf{Q} \setminus \{0\}, \mathbf{R} \setminus \{0\}, \mathbf{C} \setminus \{0\}$ の何れかとする.
このとき, G は通常の積 $\times$ に関して無限乗法群となる.
G の単位元は 1 である.

線形代数と深く関係する群を幾つか挙げよう.

例 (ベクトル空間)
ベクトル空間は和 $+$ に関して加法群となる.
単位元は零ベクトルである.

例 (対称群)
n 文字の置換全体の集合を S_n と表すことにする. すなわち, S_n は n 個の文字から自分自身への全単射全体の集合である.
このとき, S_n は写像の合成に関して群となる.
単位元は恒等置換である.
また, $\sigma \in S_n$ の逆元は σ の逆置換である.
更に, S_n は位数 $n!$ の有限群である.
$n = 1, 2$ のとき, S_n は Abel 群であるが, $n \geq 3$ のとき, S_n は Abel 群ではない.
S_n を n 次対称群という.

例 (実一般線形群)
正則な n 次実行列全体の集合を $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ と表すことにする.
このとき, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は行列の積に関して群となる.
単位元は単位行列である.
また, $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ の逆元は A の逆行列である.
更に, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は無限群である.
$n = 1$ のとき, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は 3 つめの例に現れた乗法群 $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ に他ならない.
$n \geq 2$ のとき, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は Abel 群ではない.
$\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ を n 次実一般線形群という.

1 つ群があると, その部分集合として部分群という群を考えることができる.

定義 H を群 G の部分集合とする. H は G の積により群となるとき, G の部分群という.

例 (自明な部分群)
群 G に対して, 単位群および G 自身は明らかに G の部分群である.
これらを自明な部分群という.

例 (部分空間)
V をベクトル空間, W を V の部分空間とする.
V を加法群とみなすと, W は V の部分群である.

例 $n \leq m$ のとき, 対称群 S_n は対称群 S_m の部分群と自然にみなすことができる.

1 つの群からもう 1 つの群への写像として, 準同型写像というものを考えることが多い.

定義 G, G' を群, f を G から G' への写像とする. 任意の $a, b \in G$ に対して

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

がなりたつとき, f を準同型写像という.
f は全単射な準同型写像のとき, 同型写像という. このとき, G と G' は同型であるという.

注意 同型であるという関係は同値関係であることが分かる.

例 (指数関数)
指数関数は写像

$$\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

を定める.
ここで, 指数法則

$$\exp(a+b) = (\exp a)(\exp b) \quad (a, b \in \mathbf{R})$$

に注意すると, 上の写像は加法群 $\mathbf{R}$ から乗法群 $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ への準同型写像となる.
また,

$$\mathbf{R}_{>0} = \{x \in \mathbf{R} | x > 0\}$$

とおくと, $\mathbf{R}_{>0}$ は $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ の部分群となり, exp は $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}_{>0}$ への同型写像をあたえる.

例 (行列式)
行列式は写像

$$\det : \mathrm{GL}(n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

を定める. 正則行列の行列式は 0 とはならないことを思い出そう.
ここで, 任意の $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ に対して

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

がなりたつことに注意すると, 上の写像は $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ から乗法群 $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ への準同型写像となる.

例 (置換の符号)
置換の符号は写像

$$\mathrm{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$$

を定める.
ここで, 集合 $\{\pm 1\}$ は通常の積に関して位数 2 の乗法群となることに注意しよう.
更に, 任意の $\sigma, \tau \in S_n$ に対して

$$\mathrm{sgn}\,(\sigma\tau) = (\mathrm{sgn}\,\sigma)(\mathrm{sgn}\,\tau)$$

がなりたつことに注意すると, 上の写像は準同型写像となる.

例 (線形写像)
V, W をベクトル空間, f を V から W への線形写像とする.
V, W を加法群とみなすと, f は準同型写像である.

問題 7

1. H を群 G の空でない部分集合とする．H が G の部分群となることと任意の $a, b \in H$ に対して $ab^{-1} \in H$ となることとは同値であることを示せ.

2. 行列式が 1 の n 次実行列全体の集合を $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ と表すことにする．$\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ は $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ の部分群であることを示せ．なお, $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ を n 次実特殊線形群という.

3. G, G' を群, f を G から G' への準同型写像とする.

(1) e, e' をそれぞれ G, G' の単位元とすると,

$$f(e) = e'$$

であることを示せ.

(2) 任意の $a \in G$ に対して,

$$f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$$

であることを示せ.

4. G, G' を群, f を G から G' への準同型写像とする.

(1) $f^{-1}(e')$ は $\mathrm{Ker}\, f$ と表すことが多い．ただし, e' は G' の単位元である．$\mathrm{Ker}\, f$ は G の部分群であることを示せ．なお, $\mathrm{Ker}\, f$ を f の核ともいう.

(2) f が単射であることと $\mathrm{Ker}\, f$ が単位群であることとは同値であることを示せ.

(3) $f(G)$ は $\mathrm{Im}\, f$ と表すことが多い．$\mathrm{Im}\, f$ は G' の部分群であることを示せ.

問題 7 の解答

1. まず, H が G の部分群であると仮定する.
$a, b \in H$ とする.
仮定より,

$$b^{-1} \in H.$$

よって, 再び仮定より,

$$ab^{-1} \in H.$$

逆に, 任意の $a, b \in H$ に対して $ab^{-1} \in H$ であると仮定する.
$a \in H$ とする.
仮定より,

$$e = aa^{-1} \in H.$$

よって, 再び仮定より,

$$a^{-1} = ea^{-1} \in H.$$

更に, $b \in H$ とする.
このとき, $b^{-1} \in H$ だから, 仮定より,

$$ab = a(b^{-1})^{-1} \in H.$$

したがって, H は G の部分群.

2. $A, B \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ とすると,

$$\begin{aligned} \det(AB^{-1}) &= (\det A)(\det B^{-1}) \\ &= (\det A)(\det B)^{-1} \\ &= 1 \cdot 1^{-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

よって,

$$AB^{-1} \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{R}).$$

したがって, $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ は $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ の部分群.

3. (1) $e^2 = e$ で, f は準同型写像だから,

$$\begin{aligned} f(e) &= f(e^2) \\ &= f(e)f(e). \end{aligned}$$

すなわち,

$$f(e)f(e) = f(e).$$

両辺に $f(e)^{-1}$ を掛けると,

$$f(e) = e'.$$

(2) $aa^{-1} = e$ だから, (1) と f が準同型写像であることより,

$$\begin{aligned} e' &= f(e) \\ &= f(aa^{-1}) \\ &= f(a)f(a^{-1}). \end{aligned}$$

すなわち,

$$f(a)f(a^{-1}) = e'.$$

両辺に左から $f(a)^{-1}$ を掛けると,

$$f(a^{-1}) = f(a)^{-1}.$$

4. (1) まず, e を G の単位元とすると, $f(e) = e'$ だから, $\mathrm{Ker}\, f$ は空でないことに注意する.
$a, b \in \mathrm{Ker}\, f$ とすると, f は準同型写像だから,

$$\begin{aligned} f(ab^{-1}) &= f(a)f(b^{-1}) \\ &= f(a)f(b)^{-1} \\ &= e'(e')^{-1} \\ &= e'. \end{aligned}$$

よって,

$$ab^{-1} \in \mathrm{Ker}\, f.$$

したがって, $\mathrm{Ker}\, f$ は G の部分群.

(2) まず, f が単射であると仮定する.
$a \in \mathrm{Ker}\, f$ とすると,

$$f(a) = f(e) = e'.$$

f は単射だから,

$$a = e.$$

したがって, $\mathrm{Ker}\, f$ は単位群.
逆に, $\mathrm{Ker}\, f$ が単位群であると仮定する.
$a, b \in G$ が

$$f(a) = f(b)$$

をみたすとすると, f は準同型写像だから,

$$\begin{aligned} f(ab^{-1}) &= f(a)f(b)^{-1} \\ &= e'. \end{aligned}$$

仮定より,

$$ab^{-1} = e.$$

すなわち,

$$a = b.$$

よって, f は単射.

(3) $f(a), f(b) \in \mathrm{Im}\, f \ (a, b \in G)$ とすると, f は準同型写像だから,

$$f(a)f(b)^{-1} = f(ab^{-1}) \in \mathrm{Im}\, f.$$

よって, $\mathrm{Im}\, f$ は G' の部分群.