§8. 群の作用

幾何学的な対象の対称性は群の作用というもので表すことができる. 次の例から始めよう.

例 (2 面体群)
平面上に描かれた正 n 角形を X_n とおく.
平面から平面への変換で, X_n の形を変えないものを考えよう.
まず, X_n は中心の周りに $\dfrac{2\pi}{n}$ の整数倍だけ回転させても形は変わらない.
また, X_n の中心と頂点の 1 つまたは 1 つの辺の中点を結んで得られる直線を l とおくと, X_n は l を軸とする線対称によっても形は変わらない.
このような変換全体は写像の合成に関して位数 $2n$ の有限群となる.
これを n 次の 2 面体群という.

群の作用とは上の例のような状況を一般化したものである.

定義　G を群, X を集合とする. $(a, x) \in G \times X$ に対して $ax \in X$ を対応させる $G \times X$ から X への写像が存在し, 次の (1), (2) がなりたつとき, G は X に左から作用する, または単に作用するという.

(1) 任意の $a, b \in G$ および任意の $x \in X$ に対して, $a(bx) = (ab)x$.
(2) e を G の単位元とすると, 任意の $x \in X$ に対して, $ex = x$.

このとき, G を X の変換群, X を G 集合という.
右からの作用についても同様に定めることができる. 例えば, 右からの作用の場合, (1) に対応する式は

$$(xa)b = x(ab)$$

である.

例 (自明な作用)
G を群, X を集合とする.
このとき,

$$ax = x \quad ((a, x) \in G \times X)$$

とおくことにより, G は X に作用する.
これを自明な作用という.

例　$A \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ および $x \in \mathbf{R}^n$ に対して, 行列の積を用いて $Ax \in \mathbf{R}^n$ を対応させよう.
まず, 行列の積は結合律をみたすから, 上の定義における (1) がなりたつ.
また, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ の単位元は n 次単位行列であるから, 上の定義における (2) もなりたつ.
よって, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は $\mathbf{R}^n$ に左から作用する.
なお, n 次元数ベクトルは行ベクトルを用いて表す場合もある. ここでは, 上の $\mathbf{R}^n$ と区別して,

$$\mathbf{R}_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

と表そう. このとき, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は $\mathbf{R}_n$ に右から作用する.

例　n 次実行列全体の集合を $M_n(\mathbf{R})$ と表すことにする.
$P \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ および $X \in M_n(\mathbf{R})$ に対して, 行列の積を用いて $PXP^{-1} \in M_n(\mathbf{R})$ を対応させよう.

まず, $P, Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$, $X \in M_n(\mathbf{R})$ とすると,

$$P(QXQ^{-1})P^{-1} = (PQ)X(PQ)^{-1}.$$

よって, 上の定義における (1) がなりたつ.
また, E を n 次単位行列とすると, 任意の $X \in M_n(\mathbf{R})$ に対して

$$EXE^{-1} = X.$$

よって, 上の定義における (2) もなりたつ.
したがって, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は $M_n(\mathbf{R})$ に左から作用する.
なお, $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ および $X \in M_n(\mathbf{R})$ に対して, $P^{-1}XP \in M_n(\mathbf{R})$ を対応させると, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は $M_n(\mathbf{R})$ に右から作用する.
$P, Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$, $X \in M_n(\mathbf{R})$ とすると,

$$Q^{-1}(P^{-1}XP)Q = (PQ)^{-1}X(PQ)$$

であることに注意しよう.

集合 X から X 自身への全単射全体の集合を $S(X)$ と表すことにする.
このとき, $S(X)$ は写像の合成に関して群となる.
例えば,

$$X = \{1, 2, \ldots, n\}$$

のとき, $S(X)$ は n 次対称群 S_n に他ならない.
ここで, 群 G の X への作用があたえられているとする. 簡単のため, 左からの作用を考えることにする.
このとき, 各 $a \in G$ に対して, X から X 自身への写像 $\varphi(a)$ を

$$\varphi(a)(x) = ax \quad (x \in X)$$

により定める.

定理 φ は G から $S(X)$ への準同型写像.

証明 $a, b \in G$, $x, y \in X$ とする.
まず,

$$\begin{aligned}
\varphi(a)(\varphi(a^{-1})(x)) &= \varphi(a)(a^{-1}x) \\
&= a(a^{-1}x) \\
&= (aa^{-1})x \\
&= ex \\
&= x.
\end{aligned}$$

よって, $\varphi(a)$ は全射.
次に,

$$\varphi(a)(x) = \varphi(a)(y)$$

とすると,

$$ax = ay.$$

よって,

$$
\begin{aligned}
x &= ex \\
&= (a^{-1}a)x \\
&= a^{-1}(ax) \\
&= a^{-1}(ay) \\
&= y.
\end{aligned}
$$

したがって, $\varphi(a)$ は単射.
以上より,

$$\varphi(a) \in S(X).$$

更に,

$$
\begin{aligned}
\varphi(ab)(x) &= (ab)x \\
&= a(bx) \\
&= a(\varphi(b)(x)) \\
&= \varphi(a)(\varphi(b)(x)) \\
&= (\varphi(a)\varphi(b))(x).
\end{aligned}
$$

よって,

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

すなわち, φ は準同型写像. $\square$

上の定理とは逆に, G から $S(X)$ への準同型写像 φ があたえられているとする.
このとき, $(a, x) \in G \times X$ から $\varphi(a)(x) \in X$ を対応させる $G \times X$ から X への写像は G の X への作用をあたえることが分かる.
よって, G の X への作用を考えることと G から $S(X)$ への準同型写像を考えることとは同値なのである.
群 G が X に左から作用しているとき, $x \in X$ に対して X の部分集合 Gx を

$$Gx = \{gx | g \in G\}$$

により定め, x の軌道という.
このとき, 次がなりたつ.

定理 $x, y \in X$ とする. x, y が同じ軌道の元であることと $Gx = Gy$ であることとは同値.

上の定理より, $x, y \in X$ に対して, x, y が同じ軌道の元であるとき, $x \sim y$ と表すことにすると, $\sim$ は X の上の同値関係を定める. X の $\sim$ による商集合 $X/\sim$ を $G\backslash X$ と表し, X の G による商という.
なお, 右からの作用を考える場合は X の G による商を X/G と表す.
軌道全体は X を互いに交わらない部分集合の和に分解する. これを軌道分解という.
特に, X が 1 つの軌道のみからなるとき, G は X に推移的に作用するという.
このとき, 任意の $x, y \in X$ に対して, $y = ax$ となる $a \in G$ が存在する.

問題 8

1. X を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の多項式全体の集合とし, $(\sigma, f) \in S_n \times X$ に対して, $\sigma f \in X$ を

$$(\sigma f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)})$$

により定める. このとき, (σ, f) から σf への対応は S_n の X への左からの作用を定めることを示せ.

2. X, Y を集合とし, X から Y への写像全体の集合を $F(X, Y)$ と表すことにする. また, 群 G が X に左から作用しているとし, $(a, f) \in G \times F(X, Y)$ に対して $af \in F(X, Y)$ を

$$(af)(x) = f(a^{-1}x) \quad (x \in X)$$

により定める. このとき, (a, f) から af への対応は G の $F(X, Y)$ への左からの作用を定めることを示せ.

3. G を群とする.

(1) $a \in G$ を固定しておき, G から G 自身への写像 i_a を

$$i_a(g) = aga^{-1} \quad (g \in G)$$

により定める. i_a は同型写像であることを示せ. なお, i_a を内部自己同型という.

(2) $(a, g) \in G \times G$ から $i_a(g) \in G$ への対応は G の G 自身への左からの作用を定めることを示せ. なお, この作用を内部自己同型作用という.

4. 群 G が集合 X に左から作用しているとし, $x \in X$ に対して G の部分集合 G_x を

$$G_x = \{a \in G | ax = x\}$$

により定める. G_x は G の部分群であることを示せ. なお, G_x を x の固定化部分群という.

問題 8 の解答

1. $\sigma, \tau \in S_n$, $f \in X$ とする.
まず,

$$
\begin{aligned}
((\sigma\tau)f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f(x_{(\sigma\tau)^{-1}(1)}, x_{(\sigma\tau)^{-1}(2)}, \ldots, x_{(\sigma\tau)^{-1}(n)}) \\
&= f(x_{\tau^{-1}(\sigma^{-1}(1))}, x_{\tau^{-1}(\sigma^{-1}(2))}, \ldots, x_{\tau^{-1}(\sigma^{-1}(n))}) \\
&= (\tau f)(x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)}) \\
&= (\sigma(\tau f))(x_1, x_2, \ldots, x_n).
\end{aligned}
$$

よって,

$$(\sigma\tau)f = \sigma(\tau f).$$

また, ε を恒等置換とすると, 明らかに,

$$\varepsilon f = f.$$

したがって, (σ, f) から σf への対応は S_n の X への左からの作用を定める.

2. $a, b \in G$, $f \in F(X, Y)$ とする.
まず, $x \in X$ とすると,

$$
\begin{aligned}
((ab)f)(x) &= f((ab)^{-1}x) \\
&= f((b^{-1}a^{-1})x) \\
&= f(b^{-1}(a^{-1}x)) \\
&= (bf)(a^{-1}x) \\
&= (a(bf))(x).
\end{aligned}
$$

よって,

$$(ab)f = a(bf).$$

また, 明らかに,

$$ef = f.$$

したがって, (a, f) から af への対応は G の $F(X, Y)$ への左からの作用を定める.

3. (1) $g, h \in G$ とする.
まず,

$$
\begin{aligned}
i_a(gh) &= a(gh)a^{-1} \\
&= (aga^{-1})(aha^{-1}) \\
&= i_a(g)i_a(h).
\end{aligned}
$$

よって, i_a は準同型写像.
次に,

$$
\begin{aligned}
i_a(a^{-1}ga) &= a(a^{-1}ga)a^{-1} \\
&= g.
\end{aligned}
$$

よって, i_a は全射.

更に,

$$i_a(g) = i_a(h)$$

とすると,

$$aga^{-1} = aha^{-1}.$$

両辺に左から a^{-1}, 右から a を掛けると,

$$g = h.$$

よって, i_a は単射.
したがって, i_a は同型写像.
(2) $g \in G$ とする.
まず, $a, b \in G$ とすると,

$$\begin{aligned} i_{ab}(g) &= (ab)g(ab)^{-1} \\ &= abgb^{-1}a^{-1} \\ &= a(i_b(g))a^{-1} \\ &= i_a(i_b(g)). \end{aligned}$$

次に,

$$\begin{aligned} i_e(g) &= ege^{-1} \\ &= g. \end{aligned}$$

よって, $(a, g) \in G \times G$ から $i_a(g) \in G$ への対応は G の G 自身への左からの作用を定める.

4. まず, 作用の定義より,

$$e \in G_x.$$

次に, $a, b \in G_x$ とすると,

$$\begin{aligned} (ab)x &= a(bx) \\ &= ax \\ &= x. \end{aligned}$$

よって,

$$ab \in G_x.$$

また,

$$ax = x$$

の両辺に a^{-1} を作用させると,

$$a^{-1}x = x.$$

よって,

$$a^{-1} \in G_x.$$

したがって, G_x は G の部分群.