

## §9. 内積空間

ここでは、内積空間について簡単に述べておこう。

**定義**  $V$  をベクトル空間とし、 $u, v, w \in V, c \in \mathbf{R}$  とする。任意のベクトル  $u, v$  に対して実数  $\langle u, v \rangle$  が定まり、次の (1)~(4) をみたすとき、 $\langle u, v \rangle$  を  $u$  と  $v$  の内積、対応  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $V$  の内積、組  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  を内積空間という。

$$(1) \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle.$$

$$(2) \langle cu, v \rangle = c\langle u, v \rangle.$$

$$(3) \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle.$$

$$(4) u \neq 0 \text{ ならば, } \langle u, u \rangle > 0.$$

以下では内積の記号は常に  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を用いることにして、内積空間は単に  $V$  と表すことにする。また、ここでは実ベクトル空間を考えているが、複素ベクトル空間に対する内積は Hermite 内積といい、定義は上とは若干異なるものとなる。

(2), (3) より、零ベクトルとの内積は 0 となることが分かる。すなわち、

$$\langle 0, u \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0$$

がなりたつ。

また、

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle, \quad \langle u, cv \rangle = c\langle u, v \rangle$$

がなりたつことも容易に確かめることができる。

**例 (標準内積)**

$\mathbf{R}^n$  のベクトル

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に対して

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

とおくと、対応  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は上の (1)~(4) の性質をみたし、 $\mathbf{R}^n$  の内積を定めることが分かる。これを  $\mathbf{R}^n$  の標準内積という。

なお、この場合は行列の積を用いて

$$\langle x, y \rangle = {}^t xy$$

と表すこともできる。もちろん 1 次の正方行列は普通の実数と同一視している。

$V$  を内積空間とすると、任意の  $u \in V$  に対して

$$\langle u, u \rangle \geq 0$$

となるから、

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

とおくことができる。内積の定義における (4) と定義の直後に注意したことより、 $\|u\| = 0$  となるのは  $u = 0$  のときのみである。 $\|u\|$  を  $u$  のノルムまたは長さ、対応  $\|\cdot\|$  を  $V$  のノルムという。

ノルムに関して次がなりたつ.

**定理**  $V$  を内積空間とし,  $u, v \in V, c \in \mathbf{R}$  とすると,  $V$  のノルム  $\| \cdot \|$  に関して次の (1)~(3) がなりたつ.

- (1)  $\|cu\| = |c|\|u\|$ .  
 (2)  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\|v\|$  (Cauchy-Schwarz の不等式).  
 (3)  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  (三角不等式).

内積空間  $V$  の2つのベクトル  $u, v$  に対して,  $\langle u, v \rangle = 0$  がなりたつとき,  $u$  と  $v$  は直交するという. 以下ではベクトル空間は有限次元であるとしよう.

内積空間に対しては正規直交基底という特別な基底を考えることができる.

**定義**  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  を内積空間  $V$  の基底とする. 任意の  $i, j = 1, 2, \dots, n$  に対して

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

がなりたつとき,  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  を  $V$  の正規直交基底という.

なお, 上の式は Kronecker の  $\delta$  を用いると,

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$$

と表すことができる.

**例**  $\mathbf{R}^n$  の標準基底は標準内積に関して正規直交基底となる.

内積空間の基底があたえられると, 次のようにして正規直交基底を構成することができる.

**Gram-Schmidt の直交化法**  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  を内積空間  $V$  の基底とする.  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  を

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\|u_1\|} u_1, \\ v_2' &= u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1, \\ v_2 &= \frac{1}{\|v_2'\|} v_2', \\ &\vdots \\ v_m' &= u_m - \langle u_m, v_1 \rangle v_1 - \langle u_m, v_2 \rangle v_2 - \cdots - \langle u_m, v_{m-1} \rangle v_{m-1}, \\ v_m &= \frac{1}{\|v_m'\|} v_m', \\ &\vdots \\ v_n' &= u_n - \langle u_n, v_1 \rangle v_1 - \langle u_n, v_2 \rangle v_2 - \cdots - \langle u_n, v_{n-1} \rangle v_{n-1}, \\ v_n &= \frac{1}{\|v_n'\|} v_n' \end{aligned}$$

により定めると,  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  は  $V$  の正規直交基底で, 任意の  $m = 1, 2, \dots, n$  に対して

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle_{\mathbf{R}} = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle_{\mathbf{R}}$$

がなりたつ.

上の  $v_1, v_2, \dots, v_n$  の定め方に見られるような、ベクトルをその長さで割って、長さが1のベクトルを得る操作を正規化という。

内積空間に対しては直交変換という特別な線形変換を考えることができる。これは次のように定義される内積を保つ線形変換である。

**定義**  $f$  を内積空間  $V$  の線形変換とする。任意の  $u, v \in V$  に対して

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

がなりたつとき、 $f$  を直交変換という。

次は直交変換に関する重要な事実である。

**定理**  $f$  を内積空間  $V$  の線形変換、 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  を  $V$  の正規直交基底とする。このとき、次の(1)~(4)は同値。

- (1)  $f$  は直交変換。
- (2)  $\{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)\}$  は  $V$  の正規直交基底。
- (3) 任意の  $u \in V$  に対して  $\|f(u)\| = \|u\|$ 。
- (4)  $A$  を正規直交基底  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  に関する  $f$  の表現行列とすると、 ${}^tAA = E$ 。ただし、 $E$  は  $n$  次単位行列。

上の定理に現れた  ${}^tAA = E$  をみたす正方行列を直交行列という。直交行列は

$${}^tAA = A{}^tA = E$$

をみたす正方行列と定義してもよい。

$n$  次直交行列全体の集合を  $O(n)$  と表すと、次がなりたつ。

**定理**  $A, B, C \in O(n)$  とすると、次の(1)~(4)がなりたつ。

- (1)  $AB \in O(n)$ 。
- (2)  $(AB)C = A(BC)$  (結合律)。
- (3)  $E \in O(n)$  で、 $EA = AE = A$ 。
- (4)  $A^{-1} \in O(n)$  で、 $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ 。

直交行列の定義と行列式の性質より、直交行列の行列式は1か-1であることが分かる。

よって、上の定理と合わせて、 $O(n)$  は  $GL(n, \mathbf{R})$  の部分群となる。このことから、 $O(n)$  を  $n$  次直交群という。

また、行列式が1の  $n$  次直交行列全体の集合は  $GL(n, \mathbf{R})$  或いは  $O(n)$  の部分群となる。これを  $SO(n)$  と表し、 $n$  次特殊直交群という。

標準内積をもつ  $\mathbf{R}^n$  に対しては次がなりたつ。

**定理**  $n$  次の正方行列  $A$  に対して  $\mathbf{R}^n$  の線形変換  $f_A$  を

$$f_A(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定め、 $\mathbf{R}^n$  の標準内積を考える。このとき、次の(1)~(3)は同値。

- (1)  $f_A$  は直交変換。
- (2)  $A \in O(n)$ 。
- (3)  $A$  の  $n$  個の列ベクトルは  $\mathbf{R}^n$  の正規直交基底。

## 問題 9

1.  $\mathbf{R}^n$  の標準内積を考える.  $A$  を  $n$  次の正方行列とすると, 任意の  $x, y \in \mathbf{R}^n$  に対して

$$\langle x, Ay \rangle = \langle {}^t Ax, y \rangle$$

がなりたつことを示せ.

2. 内積空間  $V$  の部分空間  $W$  に対して  $V$  の部分集合  $W^\perp$  を

$$W^\perp = \{u \in V \mid \text{任意の } v \in W \text{ に対して } \langle u, v \rangle = 0\}$$

により定める.

(1)  $W^\perp$  は  $V$  の部分空間であることを示せ. なお,  $W^\perp$  を  $W$  の直交補空間という.

(2)  $W \cap W^\perp = \{0\}$  がなりたつことを示せ.

3.  $a \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  とし,  $x \in \mathbf{R}^n$  に対して

$$f(x) = x - \frac{2\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a$$

とおくと,  $f$  は  $\mathbf{R}^n$  の線形変換を定める. また,  $\mathbf{R}^n$  の標準内積を考える.

(1)  $f$  は  $\mathbf{R}^n$  の直交変換であることを示せ.

(2) 合成写像  $f \circ f$  は  $\mathbf{R}^n$  の恒等変換であることを示せ.

(3)  $f(a) = -a$  だから,  $-1$  は  $f$  の固有値である.  $W$  を固有値  $-1$  に対する  $f$  の固有空間とする.  $W$  を求めよ.

(4)  $n \geq 2$  とし,  $W^\perp$  を  $W$  の直交補空間とする.  $W^\perp$  は固有値  $1$  に対する  $f$  の固有空間であることを示せ. なお,  $f$  を  $W$  に関する鏡映という.

## 問題 9 の解答

1. 標準内積を行列の積を用いて表すと,

$$\begin{aligned}\langle x, Ay \rangle &= {}^t x(Ay) \\ &= ({}^t x A)y \\ &= ({}^t x {}^t t A)y \\ &= {}^t ({}^t A x)y \\ &= \langle {}^t A x, y \rangle.\end{aligned}$$

2. (1)  $v \in W$  とする.

まず,

$$\langle 0, v \rangle = 0$$

だから,

$$0 \in W^\perp.$$

次に,  $u_1, u_2 \in W^\perp$  とすると,

$$\begin{aligned}\langle u_1 + u_2, v \rangle &= \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle \\ &= 0 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

だから,

$$u_1 + u_2 \in W^\perp.$$

更に,  $c \in \mathbf{R}, u \in W^\perp$  とすると,

$$\begin{aligned}\langle cu, v \rangle &= c\langle u, v \rangle \\ &= c0 \\ &= 0\end{aligned}$$

だから,

$$cu \in W^\perp.$$

よって,  $W^\perp$  は  $V$  の部分空間.

(2)  $u \in W \cap W^\perp$  とすると,

$$\langle u, u \rangle = 0.$$

よって,

$$u = 0.$$

3. (1)  $x, y \in \mathbf{R}^n$  とすると,

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y) \rangle &= \left\langle x - \frac{2\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a, y - \frac{2\langle y, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a \right\rangle \\ &= \langle x, y \rangle - \frac{2\langle y, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \langle x, a \rangle - \frac{2\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \langle a, y \rangle + \frac{4\langle x, a \rangle \langle y, a \rangle}{\langle a, a \rangle^2} \langle a, a \rangle \\ &= \langle x, y \rangle.\end{aligned}$$

よって,  $f$  は  $\mathbf{R}^n$  の直交変換.

(2)  $x \in \mathbf{R}^n$  とすると,

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= f(x) - \frac{2\langle f(x), a \rangle}{\langle a, a \rangle} a \\ &= x - \frac{2\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a - \frac{2}{\langle a, a \rangle} \left\langle x - \frac{2\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a, a \right\rangle a \\ &= x - \frac{2\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a - \frac{2\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a + \frac{4\langle x, a \rangle \langle a, a \rangle}{\langle a, a \rangle^2} a \\ &= x. \end{aligned}$$

よって,  $f \circ f$  は  $\mathbf{R}^n$  の恒等変換.

(3) まず,  $x \in W$  とすると,

$$\begin{aligned} x &= -f(x) \\ &= -x + \frac{2\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a \end{aligned}$$

だから,

$$x = \frac{\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a.$$

よって,  $x$  は  $t \in \mathbf{R}$  を用いて  $x = ta$  と表すことができる.

逆に,  $t \in \mathbf{R}$  とすると,

$$\begin{aligned} f(ta) &= ta - \frac{2\langle ta, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a \\ &= -ta. \end{aligned}$$

したがって,

$$W = \{ta \mid t \in \mathbf{R}\}.$$

(4)  $n \geq 2$  だから,  $W^\perp \neq \{0\}$  であることに注意する.

まず,  $x \in W^\perp$  とすると,  $a \in W$  だから,

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{2\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a \\ &= x. \end{aligned}$$

よって,  $x$  は固有値 1 に対する  $f$  の固有空間の元.

逆に,  $x$  を固有値 1 に対する  $f$  の固有空間の元とすると, 上の計算および  $a \neq 0$  より,

$$\langle x, a \rangle = 0.$$

よって, 任意の  $t \in \mathbf{R}$  に対して

$$\langle x, ta \rangle = 0.$$

すなわち,  $x \in W^\perp$ .

したがって,  $W^\perp$  は固有値 1 に対する  $f$  の固有空間.