§11. 正規行列の対角化

実対称行列を含む対角化可能な行列として, 正規行列というものを挙げることができる. 正規行列はユニタリ行列という行列によって対角化される.
ユニタリ行列は一般には複素数を成分とする行列, すなわち複素行列である. そこで, 準備として複素ベクトル空間について述べよう.
§4 において扱った実ベクトル空間の定義において, $\mathbf{R}$ を $\mathbf{C}$ と置き替えることにより, すなわち実数によるスカラー倍を複素数によるスカラー倍へと置き替えることにより, 複素ベクトル空間を定めることができる.

例 (複素数ベクトル空間)
複素数を縦に n 個並べたもの全体を

$$\mathbf{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{C} \right\}$$

と表す.
$\mathbf{C}^n$ は行列としての和およびスカラー倍により, ベクトル空間となる. このとき, $\mathbf{C}^n$ を複素数ベクトル空間という.

実ベクトル空間の場合と同様に, 複素ベクトル空間に対しても部分空間, 1 次独立, 1 次従属, 基底, 次元といった概念を考えることができる.

例 (基本ベクトルと標準基底)
$\mathbf{C}^n$ のベクトル $e_1, e_2, \ldots, e_n$ を

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots, \; e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

により定める. これらを基本ベクトルという.
このとき, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ は 1 次独立であることが分かる.
また, $\mathbf{C}^n$ は $e_1, e_2, \ldots, e_n$ で生成されることも分かる.
よって, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ は $\mathbf{C}^n$ の基底である. これを標準基底という.
更に, $\mathbf{C}^n$ は n 次元である.

複素ベクトル空間の間の写像についても線形写像というものを考えることができる. 有限次元の場合は表現行列も考えることができる.

例　A を複素数を成分とする $m \times n$ 行列とし, $\mathbf{C}^n$ から $\mathbf{C}^m$ への線形写像 f_A を

$$f_A(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{C}^n)$$

により定める.
$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}$ をそれぞれ $\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^m$ の標準基底とすると,

$$(f_A(e_1), f_A(e_2), \ldots, f_A(e_n)) = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_m)A.$$

よって, $\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^m$ の標準基底に関する f_A の表現行列は A.

§9 においても触れたように, 複素ベクトル空間に対する内積は Hermite 内積といい, 実ベクトル空間の場合と定義は若干異なる.

定義 V を複素ベクトル空間とし, $u, v, w \in V$, $c \in \mathbf{C}$ とする. 任意のベクトル u, v に対して複素数 $\langle u, v\rangle$ が定まり, 次の (1)〜(4) をみたすとき, $\langle u, v\rangle$ を u と v の Hermite 内積, 対応 $\langle\ ,\ \rangle$ を V の Hermite 内積, 組 $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ または単に V を複素内積空間という.

(1) $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.
(2) $\langle cu, v\rangle = c\langle u, v\rangle$.
(3) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$.
(4) $u \neq 0$ ならば, $\langle u, u\rangle > 0$.

ただし, $^-$ は複素共役を表す.

上の定義より, 実ベクトル空間の内積と同様に,

$$\langle 0, u\rangle = \langle u, 0\rangle = 0, \langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$$

がなりたつ. しかし, 一般には

$$\langle u, cv\rangle = \bar{c}\langle u, v\rangle$$

となることに注意しよう.
また, ノルムも

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

により定めることができる.
更に, 正規直交基底や Gram-Schmidt の直交化法についても同様である.

例 (標準 Hermite 内積)
$\mathbf{C}^n$ のベクトル

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に対して

$$\langle x, y\rangle = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \cdots + x_n\overline{y}_n$$

とおくと, 対応 $\langle\ ,\ \rangle$ は上の (1)〜(4) の性質をみたし, $\mathbf{C}^n$ の Hermite 内積を定めることが分かる. これを $\mathbf{C}^n$ の標準 Hermite 内積という.

複素内積空間に対してはユニタリ変換という特別な線形変換を考えることができる. これは次のように定義される Hermite 内積を保つ線形変換である.

定義 f を複素内積空間 V の線形変換とする. 任意の $u, v \in V$ に対して

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

がなりたつとき, f をユニタリ変換という.

A を複素行列とし, A の転置と複素共役を取ることにより得られる行列を A^* と表す. すなわち, A^* は A の転置行列の各成分の複素共役を取ることにより得られる行列である.
直交変換の場合と同様に, ユニタリ変換に関して次がなりたつ.

定理　f を複素内積空間 V の線形変換, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ を V の正規直交基底とする. このとき, 次の (1)〜(4) は同値.

(1) f はユニタリ変換.

(2) $\{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)\}$ は V の正規直交基底.

(3) 任意の $u \in V$ に対して $\|f(u)\| = \|u\|$.

(4) A を正規直交基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ に関する f の表現行列とすると, $A^*A = E$. ただし, E は n 次単位行列.

上の定理に現れた $A^*A = E$ をみたす正方行列をユニタリ行列という. ユニタリ行列は

$$A^*A = AA^* = E$$

をみたす正方行列と定義してもよい.
正則な n 次複素行列全体の集合を $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ と表すことにする.
このとき, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ は行列の積に関して群となる.
$\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ を n 次複素一般線形群という.
一方, n 次ユニタリ行列全体の集合を $\mathrm{U}(n)$ と表す.
ユニタリ行列の定義と行列式の性質より, ユニタリ行列の行列式の絶対値は 1 であることが分かる.
更に, $\mathrm{U}(n)$ は $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ の部分群となる. このことから, $\mathrm{U}(n)$ を n 次ユニタリ群という.
また, 行列式が 1 の n 次ユニタリ行列全体の集合は $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ 或いは $\mathrm{U}(n)$ の部分群となる. これを $\mathrm{SU}(n)$ と表し, n 次特殊ユニタリ群という.
では, 正規行列について述べよう.

定義　正方行列 A は

$$A^*A = AA^*$$

となるとき, 正規行列という.

例　実対称行列, 実交代行列, 直交行列, ユニタリ行列はすべて正規行列.

定理　A を正方行列とする. A がユニタリ行列によって対角化可能であるための必要十分条件は A が正規行列であること.

正規行列をユニタリ行列によって対角化する方法は, §10 において扱った実対称行列を直交行列によって対角化する方法と同様である. すなわち, 正規行列を対角化するユニタリ行列は次の (1)〜(3) の手順で求めればよい.

(1) 固有方程式を解き, 固有値を求める.

(2) 各固有値に対する固有空間の正規直交基底を選ぶ.

(3) 正規直交基底を列ベクトルとして並べる.

ただし, 上の手順では $\mathbf{C}^n$ の標準 Hermite 内積を考えている.

問題 11

1. V を n 次元複素ベクトル空間とする．スカラー倍という演算に現れるスカラーを実数に制限して考えることにより, V は実ベクトル空間とみなすことができる．このとき, V の実ベクトル空間としての次元は $2n$ であることを示せ.

2. 等式

$$A^* = A$$

をみたす正方行列は正規行列である．なお, このような A を Hermite 行列という.
Hermite 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

をユニタリ行列によって対角化せよ．ただし, i は虚数単位である.
なお, 等式

$$A^* = -A$$

をみたす正方行列も正規行列である．このような A を歪 Hermite 行列という.

3. A, B を n 次実正方行列とする．$A + iB$ がユニタリ行列であるための必要十分条件は $2n$ 次正方行列 $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ が直交行列であることを示せ.

4. 実交代行列の固有値は純虚数であることを示せ.

問題 11 の解答

1. $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ を複素ベクトル空間としての V の基底とする.
まず, i を虚数単位とし, $u_1, iu_1, \ldots, u_n, iu_n$ の 1 次関係

$$a_1u_1 + b_1 \cdot iu_1 + \cdots + a_nu_n + b_n \cdot iu_n = 0 \quad (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{R})$$

を考えると,

$$(a_1 + ib_1)u_1 + \cdots + (a_n + ib_n)u_n = 0.$$

よって,

$$a_1 + ib_1 = \cdots = a_n + ib_n = 0.$$

すなわち,

$$a_1 = \cdots = a_n = b_1 = \cdots = b_n = 0.$$

したがって, V を実ベクトル空間とみなしたとき, $u_1, iu_1, \ldots, u_n, iu_n$ は 1 次独立.
次に, $u \in V$ とすると,

$$u = c_1u_1 + \cdots + c_nu_n \quad (c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{C})$$

と表すことができる.
$j = 1, \ldots, n$ に対して

$$c_j = a_j + ib_j \quad (a_j, b_j \in \mathbf{R})$$

とおくと,

$$u = a_1u_1 + b_1 \cdot iu_1 + \cdots + a_nu_n + b_n \cdot iu_n.$$

よって, 実ベクトル空間としての V は $u_1, iu_1, \ldots, u_n, iu_n$ で生成される.
以上より, V の実ベクトル空間としての次元は $2n$.

2. 与えられた行列を A とおく.
まず, A の固有多項式は

$$\begin{aligned}\phi_A(t) &= \begin{vmatrix} t-0 & -i \\ -(-i) & t-0 \end{vmatrix} \\ &= t^2 - 1 \\ &= (t+1)(t-1).\end{aligned}$$

よって, A の固有値は ± 1.
次に, 固有値 -1 に対する A の固有ベクトルを求める.
連立 1 次方程式

$$(-E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

を考えると,

$$ix_1 - x_2 = 0.$$

よって, ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ は固有値 -1 に対する A の固有ベクトル.
更に, 固有値 1 に対する A の固有ベクトルを求める.

連立 1 次方程式

$$(E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

を考えると,

$$x_1 - ix_2 = 0.$$

よって, ベクトル $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 1 に対する A の固有ベクトル.
上で得られたベクトルを正規化して並べたものを U とおくと,

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

このとき, U はユニタリ行列で,

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. まず,

$$\begin{aligned}(A+iB)^*(A+iB) &= ({}^tA - i{}^tB)(A+iB) \\ &= ({}^tAA + {}^tBB) + i({}^tAB - {}^tBA).\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}{}^t\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tB \\ -{}^tB & {}^tA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^tAA + {}^tBB & -({}^tAB - {}^tBA) \\ {}^tAB - {}^tBA & {}^tAA + {}^tBB \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

よって, $A+iB$ がユニタリ行列であるための必要十分条件は $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ が直交行列であることである.

4. A を n 次実交代行列とすると, A は正規行列だから,

$$U^{-1}AU = D$$

となる $U \in \mathrm{U}(n)$ および n 次対角行列 D が存在する.
両辺の転置と複素共役を取ると, A は実交代行列で, D は対角行列だから,

$$-U^{-1}AU = \overline{D}.$$

よって, $D = -\overline{D}$ だから, D の対角成分は純虚数.
したがって, 実交代行列の固有値は純虚数.