

§3. 微分方程式

微分方程式は自然現象や社会現象ばかりではなく、曲線や曲面のような幾何学的対象を記述する際にも現れる。微分方程式に現れる未知関数は多変数や行列値でもよいが、簡単のため、未知関数は実数値とし、1変数の微分方程式、すなわち常微分方程式を考えることにする。また、関数は連続あるいはある程度微分可能であるとし、定義域についてははっきり述べないことにする。 $t, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ の関数 $F(t, x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ があたえられているとき、未知関数 $x(t)$ に対する関係式

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0$$

を常微分方程式または単に微分方程式という。このとき、 n を階数という。また、 n 回微分可能な t の関数 $x(t)$ が上の式をみたすとき、 $x(t)$ を解という。

微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

と表されるとき、正規形であるという。

正規形の微分方程式の中でも具体的に解くことのできる、すなわち解を求めることのできる例を幾つか挙げよう。

例 (変数分離形)

正規形の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x)$$

は変数分離形であるという。右辺の $f(t)$ は t のみの関数、 $g(x)$ は x のみの関数である。 $g(x) \neq 0$ とすると、

$$\frac{1}{g(x)} \frac{dx}{dt} = f(t).$$

両辺を t で積分すると、

$$\int \frac{1}{g(x)} \frac{dx}{dt} dt = \int f(t) dt.$$

左辺に置換積分法を用いると、

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t) dt$$

が得られる。

$g(x_0) = 0$ をみたす定数 x_0 が存在するときは、定数関数 $x(t) = x_0$ も上の微分方程式の解となる。

例 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = tx$$

は変数分離形である。

$x \neq 0$ とすると、

$$\int \frac{dx}{x} = \int t dt.$$

よって、

$$\log|x(t)| = \frac{1}{2}t^2 + C \quad (C \in \mathbf{R}).$$

すなわち、

$$x(t) = \pm e^C e^{\frac{1}{2}t^2}.$$

$\pm e^C$ を改めて C とおくと, $C \neq 0$ で,

$$x(t) = Ce^{\frac{1}{2}t^2}.$$

これは $C = 0$ のときも解である.

例 (同次形)

正規形の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

は同次形であるという.

まず,

$$y = \frac{x}{t}$$

とおくと,

$$x = ty.$$

よって,

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{dx}{dt} \\ &= y + t \frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

したがって,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{f(y) - y}{t}.$$

これは変数分離形である.

例 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + \sqrt{\frac{x^2}{t^2} + 1}$$

は同次形である.

よって,

$$y = \frac{x}{t}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{y + \sqrt{y^2 + 1} - y}{t} \\ &= \frac{\sqrt{y^2 + 1}}{t} \end{aligned}$$

だから,

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 1}} = \int \frac{dt}{t}.$$

すなわち,

$$\log\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) = \log|t| + C \quad (C \in \mathbf{R})$$

だから,

$$y + \sqrt{y^2 + 1} = \pm e^C t.$$

$\pm e^C$ を改めて C とおくと, $C \neq 0$ で,

$$y + \sqrt{y^2 + 1} = Ct. \quad (1)$$

更に,

$$\frac{y^2 - (y^2 + 1)}{y - \sqrt{y^2 + 1}} = Ct.$$

すなわち,

$$y - \sqrt{y^2 + 1} = -\frac{1}{Ct}. \quad (2)$$

(1), (2) より,

$$y = \frac{1}{2} \left(Ct - \frac{1}{Ct} \right).$$

したがって,

$$x(t) = \frac{1}{2} \left(Ct^2 - \frac{1}{C} \right).$$

例 (線形)

正規形の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t)x + g(t)$$

は線形であるという.

上の微分方程式を変形すると,

$$e^{-\int f(t)dt} \frac{dx}{dt} - e^{-\int f(t)dt} f(t)x = e^{-\int f(t)dt} g(t).$$

すなわち,

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\int f(t)dt} x \right) = e^{-\int f(t)dt} g(t).$$

よって,

$$x(t) = e^{\int f(t)dt} \left(\int e^{-\int f(t)dt} g(t) dt + C \right) \quad (C \in \mathbf{R}).$$

例 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = x + t$$

は線形である.

$C \in \mathbf{R}$ とすると, 解は

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\int dt} \left(\int e^{-\int dt} t dt + C \right) \\ &= e^t \left(\int e^{-t} t dt + C \right) \\ &= e^t \left(-e^{-t} t + \int e^{-t} dt + C \right) \\ &= e^t \left(-e^{-t} t - e^{-t} + C \right) \\ &= -t - 1 + Ce^t. \end{aligned}$$

問題 3

1. 次の (1)~(3) の微分方程式を解け.

$$(1) \frac{dx}{dt} = x^2 \sin t.$$

$$(2) \frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{t^2} + \frac{x}{t} - 1.$$

$$(3) \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{1+t^2}x + 2t.$$

2. $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0, 1$ とする. 正規形の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t)x + g(t)x^\alpha$$

を Bernoulli の微分方程式という.

(1) $y = x^{1-\alpha}$ とおくことにより, 上の微分方程式を線形微分方程式に帰着させよ.

(2) Bernoulli の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}x + \frac{e^t}{3x^2}$$

を解け.

3. 正規形の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t)x^2 + g(t)x + h(t)$$

を Riccati の微分方程式という. x_0 を上の微分方程式の 1 つの解とする. $y = x - x_0$ とおくことにより, 上の微分方程式を Bernoulli の微分方程式に帰着させよ.

4. 2 階の微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(t)\frac{dx}{dt} + g(t)x = 0$$

は線形であるという. $y = \frac{x'}{x}$ とおくことにより, 上の微分方程式を Riccati の微分方程式に帰着させよ.

問題3の解答

1. (1) $x \neq 0$ とすると,

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int \sin t dt.$$

よって,

$$-\frac{1}{x(t)} = -\cos t + C \quad (C \in \mathbf{R}).$$

すなわち,

$$x(t) = \frac{1}{\cos t - C}$$

また, $x(t) = 0$ も解.

(2) まず,

$$y = \frac{x}{t}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{y^2 + y - 1 - y}{t} \\ &= \frac{y^2 - 1}{t} \end{aligned}$$

$y^2 \neq 1$, すなわち $x \neq \pm t$ とすると,

$$\int \frac{dy}{y^2 - 1} = \int \frac{dt}{t}$$

だから,

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \log |t| + C \quad (C \in \mathbf{R}).$$

すなわち,

$$\frac{1}{2} \log \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = \log |t| + C$$

だから,

$$\frac{y-1}{y+1} = \pm e^{2C} t^2.$$

$\pm e^{2C}$ を改めて C とおくと, $C \neq 0$ で,

$$y = \frac{1 + Ct^2}{1 - Ct^2}.$$

よって,

$$x(t) = t \frac{1 + Ct^2}{1 - Ct^2}.$$

また, $x(t) = \pm t$ も解.

(3) $C \in \mathbf{R}$ とすると,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\int \frac{2t}{1+t^2} dt} \left(\int e^{-\int \frac{2t}{1+t^2} dt} 2t dt + C \right) \\ &= e^{\log(1+t^2)} \left(\int e^{-\log(1+t^2)} 2t dt + C \right) \\ &= (1+t^2) \left(\int \frac{2t}{1+t^2} dt + C \right) \\ &= (1+t^2) \{ \log(1+t^2) + C \}. \end{aligned}$$

2. (1) $y = x^{1-\alpha}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= (1-\alpha)x^{-\alpha}\frac{dx}{dt} \\ &= (1-\alpha)x^{-\alpha}(f(t)x + g(t)x^\alpha) \\ &= (1-\alpha)f(t)x^{1-\alpha} + (1-\alpha)g(t).\end{aligned}$$

よって,

$$\frac{dy}{dt} = (1-\alpha)f(t)y + (1-\alpha)g(t).$$

これは y に関する線形微分方程式.

(2) $y = x^3$ とおくと,

$$\frac{dy}{dt} = y + e^t.$$

よって, $C \in \mathbf{R}$ とすると,

$$\begin{aligned}y &= e^{\int dt} \left(\int e^{-\int dt} e^t dt + C \right) \\ &= e^t \left(\int e^{-t} e^t dt + C \right) \\ &= e^t(t + C).\end{aligned}$$

したがって,

$$x(t) = \{e^t(t + C)\}^{\frac{1}{3}}.$$

3. $x = y + x_0$ を代入すると,

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dx_0}{dt} = f(t)(y + x_0)^2 + g(t)(y + x_0) + h(t).$$

よって,

$$\frac{dy}{dt} = f(t)y^2 + (2f(t)x_0 + g(t))y + \left(f(t)x_0^2 + g(t)x_0 + h(t) - \frac{dx_0}{dt} \right).$$

x_0 は解だから,

$$\frac{dy}{dt} = (2f(t)x_0 + g(t))y + f(t)y^2.$$

これは y に関する Bernoulli の微分方程式.

4. y を微分すると,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{x''x - (x')^2}{x^2} \\ &= \frac{1}{x}(-f(t)x' - g(t)x) - y^2 \\ &= -f(t)y - g(t) - y^2.\end{aligned}$$

よって,

$$\frac{dy}{dt} = -y^2 - f(t)y - g(t).$$

これは y に関する Riccati の微分方程式.