§4. 部分多様体

部分多様体は多様体の基本的な例であるが, ここでは §2 や §3 において扱った Lie 群や Riemann 多様体との関連についても述べていこう.
まず, はめ込みと埋め込みについて述べる.

定義 M, N を C^∞ 級多様体, f を M から N への C^∞ 級写像とする. 任意の $p \in M$ に対して p における f の微分

$$(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$$

が単射なとき, f をはめ込みという.

注意 M から N へのはめ込みが存在するためには, 少なくとも M の次元は N の次元以下でなければならない.

例 (正則曲線, 正則曲面)
曲線論や曲面論において現れる, 区間や領域から Euclid 空間への写像としてあたえられる正則曲線や正則曲面ははめ込みである. 各点において微分が単射であるという条件が, 各点において接線や接平面が存在するという条件と同値であることに注意しよう.

定義 M, N を C^∞ 級多様体, f を M から N への C^∞ 級写像とする. f ははめ込みで M から $f(M)$ への同相写像を定めるとき, 埋め込みという. ただし, $f(M)$ の位相は相対位相である.

注意 定義より, 埋め込みは単射なはめ込みとなる.
埋め込みの定義を位相的な条件を課さずに, 単射なはめ込みとして定める場合もある.

例 (球面)
n 次元球面 S^n を

$$S^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

と表しておく. S^n は n 次元 C^∞ 級多様体である.
このとき, S^n から $\mathbf{R}^{n+1}$ への包含写像は埋め込みとなる.

例 $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}^2$ への写像 f を

$$f(t) = (\cos t, \sin t) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める.
このとき,

$$\begin{aligned} f'(t) &= (-\sin t, \cos t) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

だから, f ははめ込みである.
しかし,

$$f(t + 2\pi) = f(t) \quad (t \in \mathbf{R})$$

だから, f は単射ではない.
よって, f は埋め込みではない.

では, 部分多様体を定義しよう.

定義 N を n 次元 C^∞ 級多様体, M を N の部分集合とする. 任意の $p \in M$ に対して $p \in U$ となる N の座標近傍 (U, φ) が存在し,

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表しておくと

$$\varphi(M \cap U) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \varphi(U) | x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0\}$$

となるとき, M を N の m 次元 C^∞ 級部分多様体という.

注意 M の m 次元 C^∞ 級部分多様体は m 次元 C^∞ 級多様体となることが分かる.
このときの部分多様体の位相は相対位相である.
また, 上の定義と同じ記号を用いると, $M \cap U$ は M における p の近傍で,

$$\psi = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

とおくと, ψ は $M \cap U$ 上の局所座標系となる.
特に, M から N への包含写像は埋め込みとなる.
埋め込みの定義と同様に, 部分多様体の定義においても位相的な条件を除き, 単射なはめ込みの像と定義する場合もある.

例 $x, y \in \mathbf{R}^n$ に対して $x - y \in \mathbf{Z}^n$ となるとき, $x \sim y$ と表すことにする. このとき, $\sim$ は $\mathbf{R}^n$ 上の同値関係となる. 商集合を $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ と表すと, $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ は §2 において現れた n 次元トーラス T^n と C^∞ 級微分同相な C^∞ 級多様体となる. $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ も n 次元トーラスという.
以下では $n = 2$ とする.
$(a, b) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ を固定しておく. π を $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ への自然な射影とし, $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ への写像 f を

$$f(t) = \pi(at, bt) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める. このとき, 次の (1)〜(3) がなりたつことが分かる.

(1) f ははめ込み.
(2) a, b の比が有理数のとき, $f(\mathbf{R})$ は S^1 と C^∞ 級微分同相で $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ の部分多様体.
(3) a, b の比が無理数のとき, f は単射. また, $f(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ の稠密な部分集合で $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ の部分多様体ではない.

例 $m, n \in \mathbf{N}$, $m > n$ とする. U を $\mathbf{R}^m$ の開集合, f を U で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとる C^∞ 級関数とし,

$$M = \{x \in U | f(x) = 0\}$$

とおく. M が空でなく, 任意の $x \in M$ に対して

$$\operatorname{rank} f'(x) = n$$

であると仮定する.
このとき, M は U の $(m - n)$ 次元 C^∞ 級部分多様体となることが分かる.
上の注意より, このことを用いて, S^n から $\mathbf{R}^{n+1}$ への包含写像が埋め込みであることを示すこともできる.

上の例は次の定理の特別な場合である.

定理　M を m 次元 C^∞ 級多様体, N を n 次元 C^∞ 級多様体, f を M から N への C^∞ 級写像とし, $q \in N$ とする. $f^{-1}(q) \neq \emptyset$ で, 任意の $p \in f^{-1}(q)$ に対して $(df)_p$ が全射ならば, $f^{-1}(q)$ は M の $(m-n)$ 次元 C^∞ 級部分多様体.

§2 において Lie 群の閉部分群は Lie 群であることを述べた. 実は次がなりたつ.

定理　G を Lie 群, H を G の部分集合とする. H が G の閉部分群ならば, H は Lie 群で, G の部分多様体となる.

上の定理における H を G の閉 Lie 部分群という.
なお, 元の Lie 群の相対位相を必ずしも考えるのでなければ, Lie 部分群というものが得られる.

定義　G を Lie 群, H を G の部分集合とする. H は次の (1)〜(3) をみたすとき, G の Lie 部分群という.

(1) H は G の部分群.

(2) H は C^∞ 級多様体で, H から G への包含写像ははめ込み.

(3) H は Lie 群.

Riemann 多様体へのはめ込みに対しては誘導計量という自然な Riemann 計量を考えることができる. 特に, 誘導計量は Riemann 多様体の部分多様体に対して考えることができる.
M を C^∞ 級多様体, (N, g) を C^∞ 級 Riemann 多様体, f を M から N へのはめ込みとし,

$$(f^*g)_p(u, v) = g((df)_p(u), (df)_p(v)) \quad (u, v \in T_pM)$$

とおく.
g は N の Riemann 計量であるから, $(f^*g)_p$ は M の Riemann 計量 f^*g を定める. f^*g を f による g の誘導計量という.

例 (第一基本形式)
$\mathbf{R}^2$ の領域 D からの C^∞ 級写像として表される正則な曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を考えよう.
D から Riemann 多様体 $\mathbf{R}^3$ へのはめ込み p による $\mathbf{R}^3$ の Riemann 計量の誘導計量は曲面 p の第一基本形式に他ならない.

Riemann 多様体の間の写像に対しては長さを変えないものを考えることができる.

定義　$(M, g), (N, h)$ を C^∞ 級 Riemann 多様体, f を M から N へのはめ込みとする. $f^*h = g$ がなりたつとき, すなわち任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$(f^*h)(X, Y) = g(X, Y)$$

がなりたつとき, f を等長はめ込みという.
更に, f が C^∞ 級微分同相写像のとき, f を等長写像という.

任意のパラコンパクト多様体は十分次元の高い Euclid 空間へ埋め込み可能であることが Whitney によって示されている. 一方, 任意の Riemann 多様体が十分次元の高い Euclid 空間へ等長的に埋め込み可能であることは Nash によって示されている.

関連事項 4. 沈め込み

沈め込みとは各点において微分が全射となるような多様体の間の写像である.
M を m 次元 C^∞ 級多様体, N を n 次元 C^∞ 級多様体, f を M から N への沈め込みとする.
沈め込みの定義より, $m \geq n$ がなりたち, $q \in f(M)$ とすると, $f^{-1}(q)$ は M の $(m-n)$ 次元 C^∞ 級部分多様体である. $f^{-1}(q)$ を q 上のファイバーという.
また, $p \in M$ とすると, $p \in U$ となる座標近傍 (U, φ) および $f(p) \in V$ となる座標近傍 (V, ψ) が存在し,

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

と表しておくと,

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad ((x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \varphi(U))$$

となることが分かる.
よって, M がコンパクトで N が連結ならば, 沈め込み f は全射である. 実際, 上の局所的表示により, $f(M)$ の任意の点は $f(M)$ の内点となるから $f(M)$ は M の開集合で, M のコンパクト性と N の連結性を合わせれば $f(M)$ は N に一致する. 更に, このときは各部分多様体 $f^{-1}(q)$ は互いに C^∞ 級微分同相であることも分かる. なお, 沈め込みの定義として, 始めから f の全射性を仮定することもある.
沈め込みの例として, Hopf 写像というものについて述べよう.
まず, $(2n+1)$ 次元球面 S^{2n+1} を

$$S^{2n+1} = \{(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1} | |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 = 1\}$$

と表しておき, ι を S^{2n+1} から $\mathbf{C}^{n+1}$ への包含写像とする.
また, π を $\mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ から n 次元複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$ への自然な射影とする.
ι の像は 0 を含まないから, π との合成を考えることができる. このとき, 合成写像 $\pi \circ \iota$ は S^{2n+1} から $\mathbf{C}P^n$ への沈め込みを定めることが分かる. $\pi \circ \iota$ が Hopf 写像である.
Hopf 写像は全射で, 各ファイバーは S^1 と C^∞ 級微分同相である.
Lie 群を用いた沈め込みの例についても述べておこう.
G を Lie 群, H を G の閉 Lie 部分群とする. このとき, G の H による左剰余類全体の集合 G/H を考えることができる. すなわち,

$$G/H = \{gH | g \in G\}$$

である.
π を G から G/H への自然な射影とし, G/H の位相については π による商位相を考える. このとき, H は G の閉集合であるから, G/H は Hausdorff であることが分かる. 更に, G/H は C^∞ 級多様体で, π は沈め込みとなることも分かり, 各ファイバーは H と C^∞ 級微分同相である. G/H を G の H による商多様体または G の等質空間という.
なお, H が更に G の正規部分群であるときは, G/H は Lie 群となる. これを G の H による商群という.