§13. 接続の曲率

ベクトル束の接続に対して, 曲率というものを考えることができる.
M を C^∞ 級多様体, E を M 上のベクトル束, ∇ を E の接続とする. $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ および $\xi \in \Gamma(E)$ に対して $R(X,Y)\xi \in \Gamma(E)$ を

$$R(X,Y)\xi = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]}\xi$$

により定める.
定義より,

$$R(X,Y)\xi = -R(Y,X)\xi \tag{$*$}$$

がなりたつことは明らかである.
更に, 次がなりたつ.

定理 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\xi \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$ とすると,

$$R(fX,Y)\xi = R(X,fY)\xi = R(X,Y)(f\xi) = fR(X,Y)\xi.$$

証明 まず,

$$\begin{aligned}
R(fX,Y)\xi &= \nabla_{fX}\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_{fX}\xi - \nabla_{[fX,Y]}\xi \\
&= f\nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y(f\nabla_X\xi) - \nabla_{f[X,Y]-(Yf)X}\xi \\
&= f\nabla_X\nabla_Y\xi - (Yf)\nabla_X\xi - f\nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{f[X,Y]}\xi + \nabla_{(Yf)X}\xi \\
&= f\nabla_X\nabla_Y\xi - (Yf)\nabla_X\xi - f\nabla_Y\nabla_X\xi - f\nabla_{[X,Y]}\xi + (Yf)\nabla_X\xi \\
&= fR(X,Y)\xi.
\end{aligned}$$

$(*)$ と合わせると,

$$R(X,fY)\xi = fR(X,Y)\xi.$$

次に,

$$\begin{aligned}
R(X,Y)(f\xi) &= \nabla_X\nabla_Y(f\xi) - \nabla_Y\nabla_X(f\xi) - \nabla_{[X,Y]}(f\xi) \\
&= \nabla_X((Yf)\xi + f\nabla_Y\xi) - \nabla_Y((Xf)\xi + f\nabla_X\xi) - ([X,Y]f)\xi - f\nabla_{[X,Y]}\xi \\
&= (XYf)\xi + (Yf)\nabla_X\xi + (Xf)\nabla_Y\xi + f\nabla_X\nabla_Y\xi \\
&\quad - (YXf)\xi - (Xf)\nabla_Y\xi - (Yf)\nabla_X\xi - f\nabla_Y\nabla_X\xi - ([X,Y]f)\xi - f\nabla_{[X,Y]}\xi \\
&= fR(X,Y)\xi.
\end{aligned}$$

□

上の定理より, R は各 $p \in M$ において $T_pM \times T_pM \times E_p$ から E_p への多重線形写像を定め, $(*)$ と合わせると,

$$R \in \Gamma\left(\bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{End}\,E\right)$$

である. R を ∇ の曲率テンソルまたは曲率という.
Riemann 計量を保つ接続に関しては次がなりたつ.

定理 M を C^∞ 級多様体, E を M 上のベクトル束, ∇ を E の接続, R を ∇ の曲率, g を E の Riemann 計量とする. ∇ が g に関して計量的ならば, 任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ と任意の $\xi, \eta \in \Gamma(E)$ に対して

$$g(R(X,Y)\xi, \eta) + g(\xi, R(X,Y)\eta) = 0.$$

証明　括弧積の定義と仮定より,

$$
\begin{aligned}
0 &= XYg(\xi,\eta) - YXg(\xi,\eta) - [X,Y]g(\xi,\eta) \\
&= X\left(g(\nabla_Y\xi,\eta) + g(\xi,\nabla_Y\eta)\right) - Y\left(g(\nabla_X\xi,\eta) + g(\xi,\nabla_X\eta)\right) - g(\nabla_{[X,Y]}\xi,\eta) - g(\xi,\nabla_{[X,Y]}\eta) \\
&= g(\nabla_X\nabla_Y\xi,\eta) + g(\nabla_Y\xi,\nabla_X\eta) + g(\nabla_X\xi,\nabla_Y\eta) + g(\xi,\nabla_X\nabla_Y\eta) \\
&\quad - g(\nabla_Y\nabla_X\xi,\eta) - g(\nabla_X\xi,\nabla_Y\eta) - g(\nabla_Y\xi,\nabla_X\eta) - g(\xi,\nabla_Y\nabla_X\eta) \\
&\quad - g(\nabla_{[X,Y]}\xi,\eta) - g(\xi,\nabla_{[X,Y]}\eta) \\
&= g(R(X,Y)\xi,\eta) + g(\xi,R(X,Y)\eta).
\end{aligned}
$$

□

次に, Levi-Civita 接続の曲率について考えよう.

定理　(M,g) を C^∞ 級 Riemann 多様体, ∇ を (M,g) の Levi-Civita 接続, R を ∇ の曲率とする. このとき, 任意の $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して次の (1)〜(4) がなりたつ.
(1) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$.
(2) $g(R(X,Y)Z,W) + g(Z,R(X,Y)W) = 0$.
(3) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ (Bianchi の第一恒等式).
(4) $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$.

証明　(1): $(*)$ より, 明らか.
(2): 上の定理より, 明らか.
(3): ∇ は Levi-Civita 接続だから, 捩率は 0 である.
よって,

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= \nabla_X(\nabla_Z Y + [Y,Z]) - \nabla_Y(\nabla_Z X + [X,Z]) - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= \nabla_X\nabla_Z Y + \nabla_{[Y,Z]}X + [X,[Y,Z]] - \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_{[X,Z]}Y - [Y,[X,Z]] - \nabla_{[X,Y]}Z.
\end{aligned}
$$

したがって, Jacobi の恒等式より,

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y &= R(X,Y)Z + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X \\
&\quad + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&\quad - \nabla_Z\nabla_Y X + \nabla_Z\nabla_X Y \\
&= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Z[X,Y] \\
&= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

(4): (1)〜(3) より,

$$
\begin{aligned}
g(R(X,Y)Z,W) &= -g(R(Y,Z)X + R(Z,X)Y,W) \\
&= g(R(Y,Z)W,X) + g(R(Z,X)W,Y) \\
&= -g(R(Z,W)Y + R(W,Y)Z,X) - g(R(X,W)Z + R(W,Z)X,Y) \\
&= 2g(R(Z,W)X,Y) + g(R(W,Y)X + R(X,W)Y,Z) \\
&= 2g(R(Z,W)X,Y) - g(R(Y,X)W,Z) \\
&= 2g(R(Z,W)X,Y) - g(R(X,Y)Z,W).
\end{aligned}
$$

よって,

$$g(R(X,Y)Z,W)=g(R(Z,W)X,Y).$$

□

注意 R は $T^*M\otimes T^*M\otimes T^*M\otimes TM$ の切断とみなすことができるから, ∇ は共変微分 ∇R を定める. このとき,

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W+(\nabla_Y R)(Z,X)W+(\nabla_Z R)(X,Y)W=0$$

がなりたつことが分かる. この式を Bianchi の第二恒等式という.

Levi-Civita 接続 ∇ の曲率 R を用いて, 断面曲率というものを定義することができる.
$p\in M$ に対して σ を T_pM の 2 次元部分空間とする. σ の基底 $\{u,v\}$ を任意に選んでおき,

$$K(\sigma)=\frac{g(R(u,v)v,u)}{g(u,u)g(v,v)-g(u,v)^2}$$

とおく.

定理 $K(\sigma)$ は $\{u,v\}$ の選び方に依存しない.

証明 $\{u',v'\}$ も σ の基底とすると, $ad-bc\neq 0$ となる $a,b,c,d\in\mathbf{R}$ が存在し,

$$u'=au+bv,\ v'=cu+dv.$$

ここで, 上の定理の (1), (2) より,

$$\begin{aligned}
g(R(u',v')v',u')&=g(R(au+bv,cu+dv)(cu+dv),au+bv)\\
&=g(R(au,dv)(cu+dv),au+bv)+g(R(bv,cu)(cu+dv),au+bv)\\
&=adg(R(u,v)cu,bv)+adg(R(u,v)dv,au)\\
&\quad+bcg(R(v,u)cu,bv)+bcg(R(v,u)dv,au)\\
&=(ad-bc)^2g(R(u,v)v,u).
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
&g(au+bv,au+bv)g(cu+dv,cu+dv)-g(au+bv,cu+dv)^2\\
&=\left(a^2g(u,u)+2abg(u,v)+b^2g(v,v)\right)\left(c^2g(u,u)+2cdg(u,v)+d^2g(v,v)\right)\\
&\quad-\{acg(u,u)+2(ad+bc)g(u,v)+bdg(v,v)\}^2\\
&=(ad-bc)^2\left(g(u,u)g(v,v)-g(u,v)^2\right).
\end{aligned}$$

よって,

$$\frac{g(R(u',v')v',u')}{g(u',u')g(v',v')-g(u',v')^2}=\frac{g(R(u,v)v,u)}{g(u,u)g(v,v)-g(u,v)^2}.$$

□

$K(\sigma)$ を σ に対する断面曲率という.

関連事項 13. 法ベクトル束

Riemann 多様体の部分多様体に対して法ベクトル束というベクトル束を考えることができる. 簡単のため, Euclid 空間の部分多様体の場合について述べよう.
M を $\mathbf{R}^n$ の C^∞ 級部分多様体とする. このとき, §6 において扱ったように, M は Riemann 多様体となり, 各 $p \in M$ に対して $\mathbf{R}^n$ の直交直和分解

$$\mathbf{R}^n = T_pM \oplus T_p^\perp M$$

が得られるのであった. そこで,

$$T^\perp M = \{(p, v) | p \in M \ v \in T_p^\perp M\}$$

とおくと, $T^\perp M$ は M 上のベクトル束となる. $T^\perp M$ を M の法ベクトル束という.
$X \in \mathfrak{X}(M)$ とすると, 上の直交直和分解を用いて

$$dX = \nabla X + A_X$$

と分解することができるのであった. このとき, ∇ は M の Levi-Civita 接続である. また, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ とすると,

$$A_X Y = A_Y X, \ A_{fX} = f A_X$$

がなりたつから, A は対称な双線形写像

$$A : TM \times TM \to T^\perp M$$

を定める. A を M の第二基本形式という.
$\xi \in \Gamma(T^\perp M)$ とすると, 再び上の直交直和分解を用いて

$$d\xi = B_\xi + \nabla^\perp \xi$$

と分解することができる. このとき, $\nabla^\perp$ は $T^\perp M$ の接続を定めることが分かる. $\nabla^\perp$ を M の法接続という. また, B は双線形写像

$$B : TM \times T^\perp M \to TM$$

を定めることが分かる.
曲面論において現れる Gauss-Codazzi の方程式は Riemann 多様体の部分多様体に対する Gauss-Codazzi-Ricci の方程式へ一般化することができる.
g を M の Riemann 計量, R を ∇ の曲率とする. このとき, 任意の $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$g(R(X, Y)Z, W) = \langle A(X, W), A(Y, Z)\rangle - \langle A(X, Z), A(Y, W)\rangle$$

がなりたつことが分かる. この式を Gauss の方程式という.
残りの方程式についても, 上に現れた接続や双線形写像を用いて表すことができる.