§6. Gauss-Weingarten の公式

平面曲線または空間曲線を考える際には, Frenet の標構というものを微分したものを Frenet の標構自身の１次結合で表し, Frenet の公式または Frenet-Serret の公式という線形常微分方程式を導く．曲面の場合にこれに対応するものが Gauss の公式と Weingarten の公式という線形偏微分方程式である.
曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

の単位法ベクトルを ν とする.
このとき, 任意の $(u, v) \in D$ に対して $p_u(u, v), p_v(u, v), \nu(u, v)$ は $\mathbf{R}^3$ の基底となるから, D で定義されたある関数 $\Gamma^u_{uu}, \Gamma^v_{uu}, \dots, \Gamma^v_{vv}$ が存在し

$$\begin{cases} p_{uu} = \Gamma^u_{uu} p_u + \Gamma^v_{uu} p_v + L\nu, \\ p_{uv} = \Gamma^u_{uv} p_u + \Gamma^v_{uv} p_v + M\nu, \\ p_{vu} = \Gamma^u_{vu} p_u + \Gamma^v_{vu} p_v + M\nu, \\ p_{vv} = \Gamma^u_{vv} p_u + \Gamma^v_{vv} p_v + N\nu \end{cases} \tag{$*$}$$

と表される．ただし, p の第二基本形式を

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

とおいた．上の式を Gauss の公式, 関数 $\Gamma^u_{uu}, \Gamma^v_{uu}, \dots, \Gamma^v_{vv}$ を Christoffel の記号という．なお, 関数は必要に応じて微分可能であるとしているから, $p_{uv} = p_{vu}$ で, $(*)$ の第２式と第３式は本質的には同じものである．特に,

$$\Gamma^u_{uv} = \Gamma^u_{vu},\ \Gamma^v_{uv} = \Gamma^v_{vu}$$

である.
Christoffel の記号は第一基本形式を用いて表すことができる．上で注意したことより, 以下では $(*)$ の第１式, 第２式, 第４式に現れる Christoffel の記号を求めよう.
p の第一基本形式を

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

とする.
まず,

$$\begin{aligned} \langle p_{uu}, p_u \rangle &= \frac{1}{2} \langle p_u, p_u \rangle_u \\ &= \frac{1}{2} E_u \end{aligned}$$

だから, $(*)$ の第１式と p_u の内積を取ると,

$$\frac{1}{2} E_u = \Gamma^u_{uu} E + \Gamma^v_{uu} F.$$

また,

$$\begin{aligned} \langle p_{uu}, p_v \rangle &= \langle p_u, p_v \rangle_u - \langle p_u, p_{vu} \rangle \\ &= F_u - \frac{1}{2} \langle p_u, p_u \rangle_v \\ &= F_u - \frac{1}{2} E_v \end{aligned}$$

だから, $(*)$ の第 1 式と p_v の内積を取ると,

$$F_u - \frac{1}{2}E_v = \Gamma^u_{uu}F + \Gamma^v_{uu}G.$$

同様に, $(*)$ の第 4 式より,

$$\frac{1}{2}G_v = \Gamma^v_{vv}G + \Gamma^u_{vv}F,\ F_v - \frac{1}{2}G_u = \Gamma^v_{vv}F + \Gamma^u_{vv}E.$$

次に,

$$\begin{aligned}\langle p_{uv}, p_u\rangle &= \frac{1}{2}\langle p_u, p_u\rangle_v \\ &= \frac{1}{2}E_v\end{aligned}$$

だから, $(*)$ の第 2 式と p_u の内積を取ると,

$$\frac{1}{2}E_v = \Gamma^u_{uv}E + \Gamma^v_{uv}F.$$

同様に,

$$\frac{1}{2}G_u = \Gamma^v_{uv}G + \Gamma^u_{uv}F.$$

これらを行列を用いてまとめると,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} & \Gamma^u_{uv} & \Gamma^u_{vv} \\ \Gamma^v_{uu} & \Gamma^v_{uv} & \Gamma^v_{vv} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}.$$

ここで, $EG - F^2$ は常に正であることに注意すると,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} & \Gamma^u_{uv} & \Gamma^u_{vv} \\ \Gamma^v_{uu} & \Gamma^v_{uv} & \Gamma^v_{vv} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(EG-F^2)}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{cases} \Gamma^u_{uu} = \dfrac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)}, \\ \Gamma^u_{uv} = \dfrac{GE_v - FG_u}{2(EG-F^2)}, \\ \Gamma^u_{vv} = \dfrac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG-F^2)}, \\ \Gamma^v_{uu} = \dfrac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG-F^2)}, \\ \Gamma^v_{uv} = \dfrac{EG_u - FE_v}{2(EG-F^2)}, \\ \Gamma^v_{vv} = \dfrac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG-F^2)}. \end{cases}$$

次に, Weingarten の公式について述べよう.

まず,

$$\langle \nu, \nu \rangle = 1$$

の両辺を u, v で微分すると,

$$\langle \nu_u, \nu \rangle = \langle \nu_v, \nu \rangle = 0$$

となる.
よって, D 上のある関数 P, Q, R, S が存在し

$$\begin{pmatrix} \nu_u \\ \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix}$$

と表される.
ここで,

$$\begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} \left({}^t p_u, {}^t p_v \right) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

一方,

$$\begin{aligned} \langle \nu_u, p_u \rangle &= \langle \nu, p_u \rangle_u - \langle \nu, p_{uu} \rangle \\ &= -L. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} \langle \nu_u, p_v \rangle &= \langle \nu, p_v \rangle_u - \langle \nu, p_{vu} \rangle \\ &= -M. \end{aligned}$$

同様に,

$$\langle \nu_v, p_u \rangle = -M, \ \langle \nu_v, p_v \rangle = -N$$

だから,

$$\begin{pmatrix} \nu_u \\ \nu_v \end{pmatrix} \left({}^t p_u, {}^t p_v \right) = - \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \\ &= - \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} FM - GL & FL - EM \\ FN - GM & FM - EN \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{cases} \nu_u = \dfrac{FM - GL}{EG - F^2} p_u + \dfrac{FL - EM}{EG - F^2} p_v, \\ \nu_v = \dfrac{FN - GM}{EG - F^2} p_u + \dfrac{FM - EN}{EG - F^2} p_v. \end{cases}$$

この式が Weingarten の公式である.

問題 6

1. 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}$$

上の弧長により径数付けられた曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^3$$

を

$$\gamma(s) = p(u(s), v(s)) \quad (s \in I)$$

と表しておき, $\Gamma^u_{uu}, \Gamma^v_{uu}, \dots, \Gamma^v_{vv}$ を p に対する Christoffel の記号とする.

(1) γ の測地的曲率ベクトルを Christoffel の記号を用いて表せ.

(2) γ が測地線となるとき, γ がみたす微分方程式を求めよ. この微分方程式を測地線の方程式という.

(3) p が

$$p(u, v) = (u, v, 0) \quad ((u, v) \in \mathbf{R}^2)$$

により定められる平面のとき, 測地線の方程式は

$$u'' = v'' = 0$$

となることを示せ. 特に, 平面の測地線は直線の一部となることが分かる.

2. 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

の第一基本形式が

$$Edu^2 + Gdv^2$$

と表されるとき, p に対する Christoffel の記号は

$$\Gamma^u_{uu} = \frac{E_u}{2E},\ \Gamma^u_{uv} = \frac{E_v}{2E},\ \Gamma^u_{vv} = -\frac{G_u}{2E},\ \Gamma^v_{uu} = -\frac{E_v}{2G},\ \Gamma^v_{uv} = \frac{G_u}{2G},\ \Gamma^v_{vv} = \frac{G_v}{2G}$$

によりあたえられる.

(1) §4 において扱ったように, 柱面の第一基本形式は

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)du^2 + dv^2$$

によりあたえられる. ただし, x, y は u のみの関数である. このとき, 上の Christoffel の記号を求めよ.

(2) $a > 0$ とする. 問題 4 において扱ったように, 半径 a の球面の一部の第一基本形式は

$$a^2du^2 + a^2 \sin^2 u dv^2$$

によりあたえられる. このとき, 上の Christoffel の記号を求めよ.

(3) 問題 4 において扱ったように, 回転面の第一基本形式は

$$\left\{(f'(u))^2 + (g'(u))^2\right\} du^2 + (f(u))^2 dv^2$$

によりあたえられる. このとき, 上の Christoffel の記号を求めよ.

問題 6 の解答

1. (1) 合成関数の微分法より,

$$\gamma' = p_u u' + p_v v'.$$

ν を p の単位法ベクトル,

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

を p の第二基本形式とすると,

$$\begin{aligned}
\gamma'' &= p_{uu}(u')^2 + p_{uv}v'u' + p_u u'' + p_{vu}u'v' + p_{vv}(v')^2 + p_v v'' \\
&= p_u u'' + p_v v'' + p_{uu}(u')^2 + 2p_{uv}u'v' + p_{vv}(v')^2 \\
&= p_u u'' + p_v v'' + \left(\Gamma_{uu}^u p_u + \Gamma_{uu}^v p_v + L\nu\right)(u')^2 + 2\left(\Gamma_{uv}^u p_u + \Gamma_{uv}^v p_v + M\nu\right)u'v' \\
&\quad + \left(\Gamma_{vv}^u p_u + \Gamma_{vv}^v p_v + N\nu\right)(v')^2 \\
&= \left\{u'' + \Gamma_{uu}^u (u')^2 + 2\Gamma_{uv}^u u'v' + \Gamma_{vv}^u (v')^2\right\} p_u \\
&\quad + \left\{v'' + \Gamma_{uu}^v (u')^2 + 2\Gamma_{uv}^v u'v' + \Gamma_{vv}^v (v')^2\right\} p_v + \left\{L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2\right\}\nu.
\end{aligned}$$

よって, γ の測地的曲率ベクトルは

$$\begin{aligned}
&\left\{u'' + \Gamma_{uu}^u (u')^2 + 2\Gamma_{uv}^u u'v' + \Gamma_{vv}^u (v')^2\right\} p_u \\
&\quad + \left\{v'' + \Gamma_{uu}^v (u')^2 + 2\Gamma_{uv}^v u'v' + \Gamma_{vv}^v (v')^2\right\} p_v.
\end{aligned}$$

(2) (1) より, 求める微分方程式は

$$\begin{cases}
u'' + \Gamma_{uu}^u (u')^2 + 2\Gamma_{uv}^u u'v' + \Gamma_{vv}^u (v')^2 = 0, \\
v'' + \Gamma_{uu}^v (u')^2 + 2\Gamma_{uv}^v u'v' + \Gamma_{vv}^v (v')^2 = 0.
\end{cases}$$

(3) まず,

$$p_u = (1, 0, 0),\ p_v = (0, 1, 0)$$

だから, p の第一基本形式は

$$du^2 + dv^2.$$

よって, p に対する Christoffel の記号はすべて 0.
したがって, (2) より, 測地線の微分方程式は

$$u'' = v'' = 0.$$

2. (1) Christoffel の記号の式に

$$E = \dot{x}^2 + \dot{y}^2,\ G = 1$$

を代入すると,

$$\Gamma_{uv}^u = \Gamma_{vv}^u = \Gamma_{uu}^v = \Gamma_{uv}^v = \Gamma_{vv}^v = 0.$$

また,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{uu}^u &= \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)_u}{2\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)} \\
&= \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.
\end{aligned}$$

(2) Christoffel の記号の式に

$$E = a^2,\ G = a^2 \sin^2 u$$

を代入すると,

$$\Gamma^u_{uu} = \Gamma^u_{uv} = \Gamma^v_{uu} = \Gamma^v_{vv} = 0.$$

また,

$$\begin{aligned}\Gamma^u_{vv} &= -\frac{(a^2 \sin^2 u)_u}{2a^2} \\ &= -\sin u \cos u.\end{aligned}$$

更に,

$$\begin{aligned}\Gamma^v_{uv} &= \frac{(a^2 \sin^2 u)_u}{2a^2 \sin^2 u} \\ &= \frac{\cos u}{\sin u} \\ &= \cot u.\end{aligned}$$

(3) Christoffel の記号の式に

$$E = (f'(u))^2 + (g'(u))^2,\ G = (f(u))^2$$

を代入すると,

$$\Gamma^u_{uv} = \Gamma^v_{uu} = \Gamma^v_{vv} = 0.$$

また,

$$\begin{aligned}\Gamma^u_{uu} &= \frac{\{(f'(u))^2 + (g'(u))^2\}_u}{2\{(f'(u))^2 + (g'(u))^2\}} \\ &= \frac{f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u)}{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}.\end{aligned}$$

更に,

$$\begin{aligned}\Gamma^u_{vv} &= -\frac{\{(f(u))^2\}_u}{2\{(f'(u))^2 + (g'(u))^2\}} \\ &= -\frac{f(u)f'(u)}{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}.\end{aligned}$$

最後に,

$$\begin{aligned}\Gamma^v_{uv} &= \frac{\{(f(u))^2\}_u}{2(f(u))^2} \\ &= \frac{f'(u)}{f(u)}.\end{aligned}$$