

### §7. Gauss 曲率と平均曲率

ここでは、曲面の曲がり具合を記述する基本的な量である Gauss 曲率と平均曲率について述べる。  
曲面

$$p: D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

の第一基本形式, 第二基本形式をそれぞれ

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

とする.

$p$  上の曲線

$$\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を

$$\gamma(t) = p(u(t), v(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく, §4において扱ったように,  $\gamma$  の速度ベクトルは

$$\dot{\gamma} = p_u \dot{u} + p_v \dot{v}$$

で, その長さの2乗は

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = E(\dot{u})^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G(\dot{v})^2$$

によりあたえられる.

ここで, 右辺は曲線  $\gamma$  があたえられなくとも, 曲面  $p$  の各点における接平面の元, すなわち接ベクトルがあたえられれば定めることができることに注意しよう.

また,  $\gamma$  が弧長により径数付けられている場合, 法曲率は

$$L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2$$

によりあたえられるから, 上に述べた注意は法曲率についても同様である. 更に, 曲面の径数付けの方法は一通りではないが, 法曲率は  $\gamma''$  の単位法ベクトル方向の成分であるから, 単位法ベクトルを  $-1$  倍にしなければ, 法曲率は径数付けを取り替えても変わらないことにも注意しよう. そこで,  $(u_0, v_0) \in D$  を固定しておき,  $p(u_0, v_0)$  における法曲率の条件付き極値問題を考える. まず,  $p(u_0, v_0)$  における接ベクトルは  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  に対して

$$w = \alpha p_u(u_0, v_0) + \beta p_v(u_0, v_0)$$

と表される.

$\|w\| = 1$  とすると,

$$E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2 = 1, \quad (*)$$

すなわち,  $E > 0$  だから

$$\left( \sqrt{E}\alpha + \frac{F}{\sqrt{E}}\beta \right)^2 + \frac{EG - F^2}{E}\beta^2 = 1$$

となる.  $E > 0, EG - F^2 > 0$  だから, この式をみたす  $\alpha, \beta$  全体は  $\alpha\beta$  平面の楕円を表すことが分かる.

ここで, Euclid 空間の有界閉集合で定義された実数値連続関数は最大値および最小値をもつことを思い出そう. 楕円は平面の有界閉集合だから, 法曲率を表す関数

$$L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2$$

は条件 (\*) の下で最大値および最小値をもつ. これらを  $\kappa_1, \kappa_2$  とおき,  $p(u_0, v_0)$  における主曲率という. また,  $\kappa_1, \kappa_2$  をあたえるときの  $w$  の方向を主方向という. 更に,  $\kappa_1 = \kappa_2$  となるような  $p(u_0, v_0)$  を臍点という.

主曲率は Lagrange の未定乗数法により求めることができる.

3変数関数  $\Phi(\alpha, \beta, \lambda)$  を

$$\Phi(\alpha, \beta, \lambda) = L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2 - \lambda(E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2 - 1)$$

により定めると,

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha &= 2L\alpha + 2M\beta - 2\lambda E\alpha - 2\lambda F\beta \\ &= 2(L - \lambda E)\alpha + 2(M - \lambda F)\beta.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\Phi_\beta &= 2M\alpha + 2N\beta - 2\lambda F\alpha - 2\lambda G\beta \\ &= 2(M - \lambda F)\alpha + 2(N - \lambda G)\beta.\end{aligned}$$

よって,

$$\Phi_\alpha(\alpha, \beta, \lambda) = \Phi_\beta(\alpha, \beta, \lambda) = 0$$

とすると,  $\alpha, \beta$  は連立1次方程式

$$\begin{pmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

をみताす.

更に, (\*) がなりたつとすると,

$$\begin{aligned}L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2 &= (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= (\alpha, \beta) \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= \lambda(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= \lambda(E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2) \\ &= \lambda.\end{aligned}$$

また,  $(\alpha, \beta) \neq 0$  となるから, 上の連立1次方程式は自明でない解をもち,

$$\begin{vmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{vmatrix} = 0.$$

すなわち,

$$(L - \lambda E)(N - \lambda G) - (M - \lambda F)^2 = 0$$

だから,

$$(EG - F^2)\lambda^2 - (EN + GL - 2FM)\lambda + LN - M^2 = 0.$$

$EG - F^2 > 0$  だから、これは  $\lambda$  に関する 2 次方程式である。  
よって、解と係数の関係より、

$$\kappa_1 \kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad \kappa_1 + \kappa_2 = \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2}.$$

主曲率の積および平均をそれぞれ  $K, H$  と表す。すなわち、

$$\begin{cases} K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \\ H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} \end{cases}$$

である。 $K, H$  をそれぞれ Gauss 曲率, 平均曲率という。  
特に、

$$\begin{aligned} H^2 - K &= \frac{1}{4}(\kappa_1 + \kappa_2)^2 - \kappa_1 \kappa_2 \\ &= \frac{1}{4}(\kappa_1 - \kappa_2)^2 \end{aligned}$$

だから、臍点は  $H^2 = K$  となる点として特徴付けることができる。

$K > 0, K < 0, K = 0$  となる点をそれぞれ楕円点, 双曲点, 放物点という。 $EG - F^2 > 0$  だから、§5 の最後に示した定理より、 $p$  は楕円点において凸で、双曲点において鞍状である。

また、 $p$  は  $K$  が恒等的に 0 となるとき平坦、 $H$  が恒等的に 0 となるとき極小であるという。

$\kappa_1, \kappa_2$  をあたえる接ベクトルをそれぞれ  $w_1, w_2$  とし、

$$w_i = \alpha_i p_u(u_0, v_0) + \beta_i p_v(u_0, v_0) \quad (i = 1, 2)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \kappa_1 \langle w_1, w_2 \rangle &= \kappa_1 \langle w_2, w_1 \rangle \\ &= \kappa_1 (\alpha_2, \beta_2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha_2, \beta_2) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha_1, \beta_1) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \\ &= \kappa_2 (\alpha_1, \beta_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \\ &= \kappa_2 \langle w_1, w_2 \rangle. \end{aligned}$$

よって、 $\kappa_1 \neq \kappa_2$  ならば、

$$\langle w_1, w_2 \rangle = 0.$$

すなわち、臍点でない点においては 2 つの主方向は互いに直交する。

## 問題 7

1.  $a > 0$  とする. 原点中心, 半径  $a$  の球面の一部

$$p: D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を

$$D = (0, \pi) \times (0, 2\pi),$$

$$p(u, v) = (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \cos u) \quad ((u, v) \in D)$$

により定める.  $p$  の単位法ベクトルを  $\nu$  とすると,

$$\nu = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

で,  $p$  の第一基本形式を

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

とすると,

$$E = a^2, \quad F = 0, \quad G = a^2 \sin^2 u$$

である.  $p$  の第二基本形式を

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

とする.

(1)  $L, M, N$  を求めよ.

(2)  $p$  の Gauss 曲率を求めよ.

(3)  $p$  の平均曲率を求めよ.

(4)  $p$  の任意の点は臍点であることを示せ. なお, このような曲面は全臍的であるという.

2. 関数のグラフを

$$p(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

と表しておく. §4 および §5 において扱ったように,  $p$  の第一基本形式, 第二基本形式はそれぞれ

$$(1 + f_u^2)du^2 + 2f_u f_v dudv + (1 + f_v^2)dv^2, \\ \frac{f_{uu}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}du^2 + \frac{2f_{uv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}dudv + \frac{f_{vv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}dv^2$$

によりあたえられる.

(1)  $p$  の Gauss 曲率を求めよ.

(2)  $p$  の平均曲率を求めよ.

3. 曲面

$$p: D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

の単位法ベクトルを  $\nu$ , Gauss 曲率を  $K$  とすると,

$$\nu_u \times \nu_v = K p_u \times p_v$$

がなりたつことを示せ.

## 問題 7 の解答

1. (1) まず,

$$p_u = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, -a \sin u), \quad p_v = (-a \sin u \sin v, a \sin u \cos v, 0).$$

よって,

$$\begin{cases} p_{uu} = (-a \sin u \cos v, -a \sin u \sin v, -a \cos u), \\ p_{uv} = (-a \cos u \sin v, a \cos u \cos v, 0), \\ p_{vv} = (-a \sin u \cos v, -a \sin u \sin v, 0). \end{cases}$$

したがって,

$$\begin{aligned} L &= \langle p_{uu}, \nu \rangle \\ &= -(a \sin u \cos v) \sin u \cos v - (a \sin u \sin v) \sin u \sin v - (a \cos u) \cos u \\ &= -a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \langle p_{uv}, \nu \rangle \\ &= -(a \cos u \sin v) \sin u \cos v + (a \cos u \cos v) \sin u \sin v + 0 \cdot \cos u \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= \langle p_{vv}, \nu \rangle \\ &= -(a \sin u \cos v) \sin u \cos v - (a \sin u \sin v) \sin u \sin v + 0 \cdot \cos u \\ &= -a \sin^2 u. \end{aligned}$$

(2)  $p$  の Gauss 曲率は

$$\begin{aligned} \frac{LN - M^2}{EG - F^2} &= \frac{(-a)(-a \sin^2 u) - 0^2}{a^2 \cdot a^2 \sin^2 u - 0^2} \\ &= \frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

(3)  $p$  の平均曲率は

$$\begin{aligned} \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} &= \frac{a^2(-a \sin^2 u) + (a^2 \sin^2 u)(-a) - 2 \cdot 0 \cdot 0}{2(a^2 \cdot a^2 \sin^2 u - 0^2)} \\ &= -\frac{1}{a}. \end{aligned}$$

(4) (2), (3) より,

$$H^2 = K.$$

よって,  $p$  は全臍的.

2. (1)  $p$  の Gauss 曲率は

$$\frac{\frac{f_{uu}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} \frac{f_{vv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} - \left( \frac{f_{uv}}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} \right)^2}{(1 + f_u^2)(1 + f_v^2) - (f_u f_v)^2} = \frac{f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2}{(f_u^2 + f_v^2 + 1)^2}.$$

(2)  $p$  の平均曲率は

$$\begin{aligned} & \frac{(1+f_u^2)\frac{f_{vv}}{\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}} + (1+f_v^2)\frac{f_{uu}}{\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}} - 2f_u f_v \frac{f_{uv}}{\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}}}{2\{(1+f_u^2)(1+f_v^2) - (f_u f_v)^2\}} \\ &= \frac{f_{uu}(1+f_v^2) - 2f_{uv}f_u f_v + f_{vv}(1+f_u^2)}{2(f_u^2+f_v^2+1)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

3.  $p$  の第一基本形式, 第二基本形式をそれぞれ

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

とすると, Weingarten の公式より,

$$\begin{aligned} \nu_u \times \nu_v &= \left( \frac{FM - GL}{EG - F^2} p_u + \frac{FL - EM}{EG - F^2} p_v \right) \times \left( \frac{FN - GM}{EG - F^2} p_u + \frac{FM - EN}{EG - F^2} p_v \right) \\ &= \frac{(FM - GL)(FM - EN) - (FL - EM)(FN - GM)}{(EG - F^2)^2} p_u \times p_v. \end{aligned}$$

ここで, 最後の式の分子は

$$\begin{aligned} & F^2 M^2 - EFMN - FGLM + EGLN - F^2 LN + FGLM + EFMN - EGM^2 \\ &= F^2 M^2 + EGLN - F^2 LN - EGM^2 \\ &= (EG - F^2)(LN - M^2). \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \nu_u \times \nu_v &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} p_u \times p_v \\ &= K p_u \times p_v. \end{aligned}$$