§5. 線形写像

ここでは, 線形写像に関する基本的事項について簡単に述べておこう.

定義 U, V をベクトル空間, f を U から V への写像とする. f は次の (1), (2) をみたすとき, 線形写像という.

(1) 任意の $u, v \in U$ に対して $f(u+v) = f(u) + f(v)$.
(2) 任意の $c \in \mathbf{R}$ および任意の $u \in U$ に対して $f(cu) = cf(u)$.

上の (2) より, 線形写像は零ベクトルを零ベクトルへ写すことが分かる.
また, すべてのベクトルを零ベクトルへ写す写像は上の (1), (2) をみたすから, 線形写像となる. これを零写像という.

例 $m \times n$ 行列 A を固定しておき, $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への写像 f_A を行列の積を用いて,

$$f_A(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める.
このとき, f_A は上の (1), (2) の性質をみたすことが分かるから, 線形写像となる.

実は, $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像はすべて上の例のようにして得られる.

命題 f を $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像とする. このとき, ある $m \times n$ 行列 A が存在し,

$$f(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

と表される.

証明 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}$ をそれぞれ $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ の標準基底とする.
このとき, 各 $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $f(e_j)$ を $e'_1, e'_2, \ldots, e'_m$ の１次結合で

$$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + a_{2j}e'_2 + \cdots + a_{mj}e'_m \quad (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj} \in \mathbf{R})$$

と表すことができる.

よって, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ として, 線形写像の性質を用いると,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n) \\ &= x_1(a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \cdots + a_{m1}e'_m) + x_2(a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \cdots + a_{m2}e'_m) + \cdots \\ &\quad + x_n(a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \cdots + a_{mn}e'_m) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって, (i, j) 成分が a_{ij} の $m \times n$ 行列を A とおけばよい. □

ベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像 f に対して, $f(U)$, $f^{-1}(\{0\})$ をそれぞれ $\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Ker}\, f$ と表すことが多い. また, $f^{-1}(\{0\})$ を f の核ともいう.

f の像および核について次がなりたつ.

定理　$\mathrm{Im} f$ は V の部分空間.
$\mathrm{Ker}\, f$ は U の部分空間.

以下ではベクトル空間は有限次元であるとする.
f をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ をそれぞれ U, V の基底とする. このとき, $m \times n$ 行列 A を用いて,

$$(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)) = (v_1, v_2, \ldots, v_m)A$$

と表すことができる. $v_1, v_2, \ldots, v_m$ は 1 次独立だから, このような A は一意的に定まる. A を基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ に関する f の表現行列という.
次の例から分かるように, 上の例において扱った行列 A の定める自然な線形写像 f_A の表現行列は標準基底に関しては A そのものとなる.

例　A を (i, j) 成分が a_{ij} の $m \times n$ 行列とし, $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像 f_A を

$$f_A(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める.
$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}$ をそれぞれ $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ の標準基底とすると,

$$\begin{aligned}(f_A(e_1), f_A(e_2), \ldots, f_A(e_n)) &= \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right) \\ &= (e'_1, e'_2, \ldots, e'_m)A.\end{aligned}$$

よって, $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ の標準基底に関する f_A の表現行列は A.

表現行列は基底に依存するものである. まず, 基底の取り替えを行列を用いて表してみよう.
V を n 次元のベクトル空間とする. V の基底を 1 組選んでおき, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ とする.
基底の定義より, V の任意のベクトル x は

$$x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R})$$

と一意的に表される. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ に関する x の成分という.

例　$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を $\mathbf{R}^n$ の標準基底とし, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ とする. このとき,

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

だから, 標準基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ に関する x の成分は $x_1, x_2, \ldots, x_n$ である.

n 次元ベクトル空間 V の基底を 2 組選んでおき, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする.
各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して, 基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ に関する v_i の成分を $p_{1i}, p_{2i}, \ldots, p_{ni}$ とし, p_{ij} を (i, j) 成分とする n 次の正方行列を P とおくと,

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)P$$

と表すことができる. P を基底変換 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \to \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ の基底変換行列という.
基底変換行列は正則行列で, 1 つの基底変換に対して一意的に定まることが分かる.
逆に, P を始めに選んでおき, 上の式で $v_1, v_2, \ldots, v_n$ を定めることができる.
では, 基底変換によって表現行列がどのように変わるのかを見てみよう.

定理 f をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ を U の基底, P を基底変換 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \to \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ の基底変換行列, $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}, \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_m\}$ を V の基底, Q を基底変換 $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \to \{v'_1, v'_2, \ldots v'_m\}$ の基底変換行列, A を基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ に関する f の表現行列, B を基底 $\{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}, \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_m\}$ に関する f の表現行列とする. このとき,

$$B = Q^{-1}AP.$$

証明 P の (i, j) 成分を p_{ij} とおき, 定義に従って計算すると,

$$\begin{aligned}
&(f(u'_1), f(u'_2), \ldots, f(u'_n)) \\
&\quad = (f(p_{11}u_1 + p_{21}u_2 + \cdots + p_{n1}u_n), \ldots, f(p_{1n}u_1 + p_{2n}u_2 + \cdots + p_{nn}u_n)) \\
&\quad = (p_{11}f(u_1) + p_{21}f(u_2) + \cdots + p_{n1}f(u_n), \ldots, p_{1n}f(u_1) + p_{2n}f(u_2) + \cdots + p_{nn}f(u_n)) \\
&\quad = (f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n))P \\
&\quad = (v_1, v_2, \ldots, v_m)AP.
\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}
(f(u'_1), f(u'_2), \ldots, f(u'_n)) &= (v'_1, v'_2, \ldots, v'_m)B \\
&= (v_1, v_2, \ldots, v_m)QB.
\end{aligned}$$

よって,

$$(v_1, v_2, \ldots, v_m)AP = (v_1, v_2, \ldots, v_m)QB.$$

$v_1, v_2, \ldots, v_m$ は 1 次独立だから,

$$AP = QB.$$

基底変換行列は正則だから,

$$B = Q^{-1}AP.$$

□

ベクトル空間 U の線形変換, すなわち U から U 自身への線形写像に対して, U の基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ に関する表現行列を単に基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ に関する表現行列ということにする. 上の定理を線形変換の場合に適用すると, 次が得られる.

定理 f をベクトル空間 U の線形変換, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ を U の基底, P を基底変換 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \to \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ の基底変換行列, A を基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ に関する f の表現行列, B を基底 $\{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ に関する f の表現行列とする. このとき,

$$B = P^{-1}AP.$$

問題 5

1. U, V, W をベクトル空間, f を U から V への線形写像, g を V から W への線形写像とする. このとき, 合成写像 $g \circ f$ は線形写像であることを示せ.

2. f をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像とする. $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ であることと f が単射であることとは同値であることを示せ.

3. f, g をベクトル空間 U からベクトル空間 V への線形写像とし, $c \in \mathbf{R}$ とする. このとき, U から V への写像 $f+g, cf$ をそれぞれ

$$(f+g)(u) = f(u) + g(u),\ (cf)(u) = cf(u)\ (u \in U)$$

により定めると, $f+g, cf$ は線形写像となり, U から V への線形写像全体はベクトル空間となることが分かる.
$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ をそれぞれ U, V の基底, A, B をそれぞれ基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ に関する f, g の表現行列とする. 基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ に関する $f+g, cf$ の表現行列を求めよ.

4. U, V, W をベクトル空間, f を U から V への線形写像, g を V から W への線形写像とする. $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}, \{w_1, w_2, \ldots, w_l\}$ をそれぞれ U, V, W の基底, A を基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ に関する f の表現行列, B を基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}, \{w_1, w_2, \ldots, w_l\}$ に関する g の表現行列とする.

(1) 基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{w_1, w_2, \ldots, w_l\}$ に関する合成写像 $g \circ f$ の表現行列を求めよ.

(2) f が全単射であるとき, f の逆写像 f^{-1} は V から U への線形写像で, $m = n$ となることが分かる. このとき, f を同型写像といい, U と V は同型であるという.
f が同型写像のとき, 基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ に関する f^{-1} の表現行列を求めよ.

5. $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ を n 次元ベクトル空間 V の基底, P, Q をそれぞれ基底変換 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \to \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \to \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ の基底変換行列とする. 基底変換 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \to \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ の基底変換行列を求めよ.

問題 5 の解答

1. まず, $u, v \in U$ とすると,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(u+v) &= g(f(u+v)) \\ &= g(f(u)+f(v)) \\ &= g(f(u)) + g(f(v)) \\ &= (g \circ f)(u) + (g \circ f)(v).\end{aligned}$$

次に, $c \in \mathbf{R}$, $u \in U$ とすると,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(cu) &= g(f(cu)) \\ &= g(cf(u)) \\ &= cg(f(u)) \\ &= c(g \circ f)(u).\end{aligned}$$

よって, $g \circ f$ は線形写像.

2. まず, $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ であると仮定する.
$u, v \in V$ が

$$f(u) = f(v)$$

をみたすとすると, f は線形写像だから,

$$f(u - v) = 0.$$

仮定より,

$$u - v = 0.$$

すなわち,

$$u = v.$$

よって, f は単射.
逆に, f が単射であると仮定する.
$u \in \mathrm{Ker}\, f$ とすると,

$$\begin{aligned}f(u) &= 0 \\ &= f(0).\end{aligned}$$

仮定より,

$$u = 0.$$

よって,

$$\mathrm{Ker}\, f = \{0\}.$$

3. まず,

$$(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)) = (v_1, v_2, \ldots, v_m)A,$$

$$(g(u_1), g(u_2), \ldots, g(u_n)) = (v_1, v_2, \ldots, v_m)B$$

だから,

$$
\begin{aligned}
&((f+g)(u_1),(f+g)(u_2),\ldots,(f+g)(u_n)) \\
&\quad = (f(u_1)+g(u_1), f(u_2)+g(u_2),\ldots,f(u_n)+g(u_n)) \\
&\quad = (f(u_1),f(u_2),\ldots,f(u_n)) + (g(u_1),g(u_2),\ldots,g(u_n)) \\
&\quad = (v_1,v_2,\ldots,v_m)A + (v_1,v_2,\ldots,v_m)B \\
&\quad = (v_1,v_2,\ldots,v_m)(A+B).
\end{aligned}
$$

よって, 基底 $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\},\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$ に関する $f+g$ の表現行列は $A+B$.
また,

$$
\begin{aligned}
((cf)(u_1),(cf)(u_2),\ldots,(cf)(u_n)) &= (cf(u_1),cf(u_2),\ldots,cf(u_n)) \\
&= c(f(u_1),f(u_2),\ldots,f(u_n)) \\
&= c(v_1,v_2,\ldots,v_m)A \\
&= (v_1,v_2,\ldots,v_m)(cA).
\end{aligned}
$$

よって, 基底 $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\},\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$ に関する cf の表現行列は cA.

4. (1) A の (k,i) 成分を a_{ki}, B の (j,k) 成分を b_{jk} とすると, $i=1,2,\ldots,n$ のとき,

$$
\begin{aligned}
(g\circ f)(u_i) &= g(f(u_i)) \\
&= g(a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 + \cdots + a_{mi}v_m) \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_{ki}g(v_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\sum_{j=1}^{l} b_{jk}w_j \\
&= \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m} b_{jk}a_{ki}w_j
\end{aligned}
$$

ここで, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} b_{jk}a_{ki}$ は BA の (j,i) 成分.
よって, 求める表現行列は BA.

(2) 求める表現行列を B とする.
恒等写像に対する表現行列は単位行列となるから, (1) と合わせると, BA, AB はともに n 次単位行列.
よって, $B=A^{-1}$.

5. P,Q はそれぞれ

$$(v_1,v_2,\ldots,v_n) = (u_1,u_2,\ldots,u_n)P,\ \ (w_1,w_2,\ldots,w_n) = (v_1,v_2,\ldots,v_n)Q$$

により定まるから,

$$(w_1,w_2,\ldots,w_n) = (u_1,u_2,\ldots,u_n)PQ.$$

よって, 求める基底変換行列は PQ.