

§4. 解の存在と一意性

微分方程式はいつでも解が具体的に求められるとは限らないし、そもそも解が存在しない場合もある。ここでは正規形の微分方程式を考え、初期値問題の解の存在と一意性について述べよう。 $t_0 \in \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $r, R > 0$ とし、 \mathbf{R}^{n+1} の閉領域 D を

$$D = \{(t, x) | t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n, |t - t_0| \leq r, \|x - x_0\| \leq R\}$$

により定める。 $f(t, x)$ を D で定義された \mathbf{R}^n に値をとる関数とし、微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (*)$$

を考える。初期値問題とは第1式の微分方程式に、更に第2式の条件を付け加えたものである。この第2式を初期条件という。

初期値問題 (*) の解の存在については次が最も基本的である。

Cauchy の存在定理 f が D で連続ならば、

$$M = \max_{(t,x) \in D} \|f(t, x)\|, \quad \delta = \min \left\{ r, \frac{R}{M} \right\}$$

とおくと、閉区間 $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ で定義された (*) の解が存在する。

上の定理における解を局所解という。これに対して区間 $[t_0 - r, t_0 + r]$ で定義された解を大域解という。

解の一意性も保証する定理については次が基本的である。

Picard の存在と一意性定理 f が D で連続で、更にある定数 L が存在し、任意の $(t, x), (t, y) \in D$ に対して

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

がなりたつならば、(*) の局所解が一意的に存在する。

上の定理の不等式を Lipschitz 条件、 L を Lipschitz 定数という。

更に、次のような線形微分方程式の場合について述べよう。

定理 I を区間、 A を I で連続な n 次実正方行列に値をとる関数、 b を I で連続な \mathbf{R}^n に値をとる関数とし、 $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$ とする。このとき、初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xA(t) + b(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

の大域解、すなわち I で定義された解が一意的に存在する。

解の存在と一意性に関連する例を幾つか挙げよう。

例 初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = tx, \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

を考える。

$(t, x) = (0, 1)$ の近くで関数 tx は Lipschitz 条件をみたすから, 解 $x(t)$ は一意的に存在する. また, この微分方程式は線形でもある.

$t = 0$ の近くで $x(t)$ は 1 に近いから,

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x} = \int_0^t t dt.$$

よって,

$$[\log x]_1^{x(t)} = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^t.$$

したがって,

$$\log x(t) = \frac{1}{2} t^2.$$

すなわち,

$$x(t) = e^{\frac{1}{2} t^2}.$$

特に, 関数 tx の定義域をどのように考えても, $x(t)$ は大域解である.

次の例に見られるように, (*) における $f(t, x)$ の定義域 D によっては局所解は存在しても大域解は存在しない場合がある.

例 (解の爆発)

$a > 0$ とし, 初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2, \\ x(0) = a \end{cases}$$

を考える.

$(t, x) = (0, a)$ の近くで関数 x^2 は Lipschitz 条件をみたすから, 解 $x(t)$ は一意的に存在する.

$t = 0$ の近くで $x(t)$ は a に近いから,

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = \int_0^t dt.$$

よって,

$$\left[-\frac{1}{x} \right]_a^{x(t)} = [t]_0^t.$$

したがって,

$$-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{a} = t.$$

すなわち,

$$x(t) = \left(\frac{1}{a} - t \right)^{-1}.$$

特に, $x(t)$ は区間 $[0, \frac{1}{a})$ で定義されるが,

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{a} - 0} x(t) = +\infty$$

である. このようなとき, 解は爆発するという.

次は解の一意性がなりたたない例を挙げよう.

例 初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt{|x|}, \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

を考える.

$(t, x) = (0, 0)$ の近くで関数 $\sqrt{|x|}$ は連続だから, 解 $x(t)$ は存在する.

まず, $x(t) = 0$ は解.

また,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\pm x}} = \pm 2\sqrt{\pm x} \quad (\text{複号同順})$$

だから,

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}t^2 & (t \leq 0), \\ \frac{1}{4}t^2 & (t > 0) \end{cases}$$

とおくと, $x(t)$ も解.

更に, $t_1 \leq 0 \leq t_2$ とし,

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t-t_1)^2 & (t \leq t_1), \\ 0 & (t_1 < t \leq t_2), \\ \frac{1}{4}(t-t_2)^2 & (t > t_2) \end{cases}$$

とおくと, $x(t)$ も解.

3つめに述べた定理, すなわち線形微分方程式の解の存在と一意性を用いて, 指数関数や三角関数を定義することができる.

例 (指数関数)

初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

を考える.

線形微分方程式の解の存在と一意性より, \mathbf{R} 全体で定義された解 $x(t)$ が一意的に存在する. この解が指数関数 e^t である.

例 (三角関数)

初期値問題

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (x(0), y(0)) = (1, 0) \end{cases}$$

を考える.

線形微分方程式の解の存在と一意性より, \mathbf{R} 全体で定義された解 $(x(t), y(t))$ が一意的に存在する. この解が三角関数の組 $(\cos t, \sin t)$ である.

問題 4

1. $t_0, x_0 \in \mathbf{R}$, $r, R > 0$ とし, \mathbf{R}^2 の閉領域 D を

$$D = \{(t, x) | t, x \in \mathbf{R}, |t - t_0| \leq r, |x - x_0| \leq R\}$$

により定める. D で定義された関数 $f(t, x)$ が x に関して連続微分可能, すなわち D で定義された偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ が存在し, 更に $\frac{\partial f}{\partial x}$ が D で連続であるとする. このとき, $f(t, x)$ は Lipschitz 条件をみたすことを示せ.

2. 微分方程式の解の一意性定理を用いることにより, 指数法則

$$e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta$$

を示せ.

3. 微分方程式の解の一意性定理を用いることにより, 三角関数に対する加法公式

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{cases}$$

を示せ.

4. 双曲線関数 $\cosh t$ および $\sinh t$ を線形微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (x(0), y(0)) = (1, 0) \end{cases}$$

の解 $(x(t), y(t))$ を用いて,

$$x(t) = \cosh t, \quad y(t) = \sinh t$$

により定める.

微分方程式の解の一意性定理を用いることにより, 等式

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

を示せ.

問題 4 の解答

1. 仮定より, 関数 $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|$ は D で連続.

Euclid 空間の有界閉集合で定義された連続関数は最大値をもつから, 定数

$$L = \max_{(t,x) \in D} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \right|$$

が存在する.

$(t, x_1), (t, x_2) \in D$ とすると,

$$\begin{aligned} f(t, x_1) - f(t, x_2) &= [f(t, x_2 + s(x_1 - x_2))]_{s=0}^{s=1} \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(t, x_2 + s(x_1 - x_2)) ds \\ &= (x_1 - x_2) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_2 + s(x_1 - x_2)) ds. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} |f(t, x_1) - f(t, x_2)| &= |x_1 - x_2| \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_2 + s(x_1 - x_2)) ds \right| \\ &\leq |x_1 - x_2| \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_2 + s(x_1 - x_2)) \right| ds \\ &\leq |x_1 - x_2| \int_0^1 L ds \\ &\leq L|x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

したがって, $f(t, x)$ は Lipschitz 条件をみたす.

2. 初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ x(0) = e^\beta \end{cases}$$

を考える.

このとき, $e^{t+\beta}$ および $e^t e^\beta$ はともに解.

よって, 微分方程式の解の一意性定理より,

$$e^{t+\beta} = e^t e^\beta.$$

$t = \alpha$ とおくと,

$$e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta.$$

3. 初期値問題

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (x(0), y(0)) = (\cos \beta, \sin \beta) \end{cases}$$

を考える.

まず,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\cos(t + \beta), \sin(t + \beta)) &= (-\sin(t + \beta), \cos(t + \beta)) \\ &= (\cos(t + \beta), \sin(t + \beta)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\cos t \cos \beta - \sin t \sin \beta, \sin t \cos \beta + \cos t \sin \beta) \\ &= (-\sin t \cos \beta - \cos t \sin \beta, \cos t \cos \beta - \sin t \sin \beta) \\ &= (\cos t \cos \beta - \sin t \sin \beta, \sin t \cos \beta + \cos t \sin \beta) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

更に,

$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0.$$

よって, $(\cos(t + \beta), \sin(t + \beta))$ および $(\cos t \cos \beta - \sin t \sin \beta, \sin t \cos \beta + \cos t \sin \beta)$ はともに上の初期値問題の解.

したがって, 微分方程式の解の一意性定理より,

$$(\cos(t + \beta), \sin(t + \beta)) = (\cos t \cos \beta - \sin t \sin \beta, \sin t \cos \beta + \cos t \sin \beta).$$

$t = \alpha$ とおくと,

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{cases}$$

4. 関数 $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$ を

$$\tilde{x}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \tilde{y}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

により定めると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) &= \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}, \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right) \\ &= (\tilde{y}(t), \tilde{x}(t)) \\ &= (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

また,

$$(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0)) = (1, 0).$$

よって, $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ もあたえられた初期値問題の解.

したがって, 微分方程式の解の一意性定理より,

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$