§9. 四頂点定理

平面曲線に対する Frenet の標構は Frenet の公式という線形微分方程式をみたし, 平面曲線の基本定理より, 平面曲線の形は回転と平行移動を除いて曲率によって決まる. このとき, 考えている点の近くにおける曲線の形はその点の近くにおける曲率の振る舞いだけから決まり, 遠く離れた点における曲率の様子とは無関係である. これを局所的な性質という.
ここでは卵形線という平面曲線について考え, 上に述べた局所的な性質とは対照的な大域的な性質として知られる四頂点定理について述べよう.
まず, 閉区間 $[a,b]$ で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとる関数として定義される曲線

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$$

を考える. γ は端点において微分も込めて値が一致しているとき, すなわち

$$\gamma(a) = \gamma(b),\ \dot{\gamma}(a) = \dot{\gamma}(b),\ \ddot{\gamma}(a) = \ddot{\gamma}(b),\ \ldots$$

がなりたつとき, 閉曲線という.
閉曲線

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$$

は自己交差しないとき, すなわち $t_1, t_2 \in [a,b)$, $t_1 \neq t_2$ ならば $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ となるとき, 単純であるという.
以下では単純平面閉曲線

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$$

を考える. このとき, 次がなりたつ.

Jordan の曲線定理　γ は $\mathbf{R}^2$ を内部と外部の 2 つの領域に分ける.

上では閉曲線を端点において微分も込めて値が一致している曲線と定めたが, Jordan の曲線定理は γ が連続ならばなりたつ. 連続な単純平面閉曲線を Jordan 曲線ともいう.
γ 上の任意の 2 点を結ぶ線分が γ の外部の点を含まないとき, γ を凸閉曲線または卵形線という.
また, κ を γ の曲率とする. κ が極大または極小となる γ 上の点を頂点という. なお, κ の微分が 0 となる点を頂点ということもある.
問題 8 においても扱ったように, κ は

$$\kappa = \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|^3} \det \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \ddot{\gamma} \end{pmatrix}$$

によりあたえられる. これを用いて, 次の例を考えよう.

例　$a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ とし, 楕円

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定める.
まず, γ は卵形線である.
次に,

$$\dot{\gamma} = (-a\sin t, b\cos t).$$

更に,

$$\ddot{\gamma} = (-a\cos t, -b\sin t).$$

よって,

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t.$$

また,

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}\dot{\gamma}\\ \ddot{\gamma}\end{pmatrix} &= (-a\sin t)(-b\sin t) - (b\cos t)(-a\cos t)\\ &= ab.\end{aligned}$$

したがって, κ を γ の曲率とすると,

$$\kappa = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

特に, $a = \pm b$ のときを考えると, 円の曲率の絶対値は半径の逆数となり, 定数である. 逆に, 平面曲線の基本定理より, 曲率が 0 でない定数の単純平面閉曲線は円に限る.
また, 円ではないときを考え, 簡単のため $a > b > 0$ とすると,

$$\kappa = \frac{ab}{\{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t\}^{\frac{3}{2}}}$$

だから, κ は $t = 0, \pi, 2\pi$ のとき最大値 $\dfrac{a}{b^2}$ をとり, $t = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 $\dfrac{b}{a^2}$ をとる.
したがって, 頂点は $(\pm a, 0), (0, \pm b)$ の 4 つである.

四頂点定理について述べる前に, 微分積分においても扱う次の事実を思い出そう.

定理　$\mathbf{R}^n$ の有界閉集合で定義された実数値連続関数は最大値および最小値をもつ.

平面曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

の曲率を κ とすると, κ は有界閉区間 $[a, b]$ で定義された実数値連続関数となるから, 上の定理より, κ の最大値および最小値が存在する.
更に, γ が閉曲線であるとしよう.
このとき, κ が極大または極小となる点の個数は有限ならば偶数であるが, 上の定理から保証される頂点の個数は 2 つである.
しかし, 卵形線の頂点の個数については次がなりたつ.

四頂点定理　円ではない卵形線には少なくとも 4 つの頂点が存在する.

証明　背理法により示す.
弧長により径数付けられた曲率 κ の円ではない卵形線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) \quad (s \in [a, b])$$

と表しておき, γ の頂点が 2 つであると仮定する.

γ の 1 つの頂点は $\gamma(a)$ で, もう 1 つの頂点は $a < c < b$ をみたす c に対して $\gamma(c)$ であるとしてよい.
更に, κ は $s = a$ で最大値, $s = c$ で最小値をとるとしてよい.
このとき, $a \leq s \leq c$ ならば $\kappa'(s) \leq 0$ で, $c \leq s \leq b$ ならば $\kappa'(s) \geq 0$ となる.
ここで, $\gamma(a)$ と $\gamma(c)$ を結ぶ直線 l を $p, q, r \in \mathbf{R}$ を用いて,

$$l = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | px + qy + r = 0\}$$

と表しておく.
γ は卵形線だから, l によって 2 つに分けられ, $a < s < c$ の部分と $c < s < b$ の部分は l を挟んで互いに反対側に存在する.
よって, $[a, b]$ で定義された関数

$$\kappa'(s)(px(s) + qy(s) + r)$$

は符号を変えない.
また, $\{e, n\}$ を γ に対する Frenet の標構とすると,

$$e = (x', y'),\ n = (-y', x')$$

だから, Frenet の公式

$$\begin{cases} e' = \kappa n, \\ n' = -\kappa e \end{cases}$$

は

$$\begin{cases} x'' = -\kappa y', \\ y'' = \kappa x' \end{cases}$$

と同値である.
更に, γ は閉曲線だから,

$$x(a) = x(b),\ y(a) = y(b),\ x'(a) = x'(b),\ y'(a) = y'(b),\ \kappa(a) = \kappa(b).$$

したがって, 部分積分を行うと,

$$\begin{aligned} \int_a^b \kappa'(s)(px(s) + qy(s) + r)ds &= [\kappa(s)(px(s) + qy(s) + r)]_a^b - \int_a^b \kappa(s)(px'(s) + qy'(s))ds \\ &= \int_a^b (-py''(s) + qx''(s))ds \\ &= [-py'(s) + qx'(s)]_a^b \\ &= 0 \end{aligned}$$

だから, κ' は恒等的に 0, すなわち κ は定数.
このとき, γ は円となるから, 矛盾.
γ は閉曲線だから, 少なくとも 4 つの頂点が存在する. □

なお, 四頂点定理は単純閉曲線の場合についてもなりたつことが知られている.

問題 9

1. $a, b > 0$ とし, 平面閉曲線

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = ((a\cos t + b)\cos t, (a\cos t + b)\sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定める. γ を蝸牛線またはリマソンという. 特に, $a = b$ のときは心臓形またはカージオイドという.

(1) $a \neq b$ のとき, γ は正則であることを示せ.

(2) $a = b$ のとき, γ の長さを求めよ.

(3) $a \neq b$ のとき, γ の曲率を κ とする. κ を求めよ.

(4) $a > b$ のとき, γ は原点において自己交差する単純でない閉曲線となることが分かる. このとき, γ の頂点を求めよ.

(5) $a < b$ のとき, γ は卵形線ではないが, 単純閉曲線となることが分かる. このとき, γ の頂点の個数を求めよ.

問題 9 の解答

1. (1) まず,

$$\dot{\gamma} = (-a\sin t\cos t - (a\cos t + b)\sin t, -a\sin t\sin t + (a\cos t + b)\cos t).$$

よって,

$$\begin{aligned}\|\dot{\gamma}\|^2 &= \{-a\sin t\cos t - (a\cos t + b)\sin t\}^2 + \{-a\sin t\sin t + (a\cos t + b)\cos t\}^2 \\ &= a^2\sin^2 t + (a\cos t + b)^2 \\ &= a^2 + 2ab\cos t + b^2 \\ &= a^2 + 2ab\left(2\cos^2\frac{t}{2} - 1\right) + b^2 \\ &= (a-b)^2 + 4ab\cos^2\frac{t}{2}.\end{aligned}$$

$a \neq b$ だから, $\|\dot{\gamma}\| > 0$.
したがって, 任意の $t \in [0, 2\pi]$ に対して $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ だから, γ は正則.

(2) (1) の計算より,

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = 4a^2\cos^2\frac{t}{2}.$$

γ の長さは $0 \leq t \leq \pi$ の部分の長さを 2 倍して,

$$\begin{aligned}2\int_0^\pi \|\dot{\gamma}(t)\|\,dt &= 4a\int_0^\pi \cos\frac{t}{2}dt \\ &= 4a\left[2\sin\frac{t}{2}\right]_0^\pi \\ &= 8a.\end{aligned}$$

(3) (1) の計算より,

$$\dot{\gamma} = (-a\sin 2t - b\sin t, a\cos 2t + b\cos t).$$

更に,

$$\ddot{\gamma} = (-2a\cos 2t - b\cos t, -2a\sin 2t - b\sin t).$$

よって,

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}\dot{\gamma}\\ \ddot{\gamma}\end{pmatrix} &= (-a\sin 2t - b\sin t)(-2a\sin 2t - b\sin t) \\ &\quad - (a\cos 2t + b\cos t)(-2a\cos 2t - b\cos t) \\ &= 2a^2 + 3ab(\sin t\sin 2t + \cos t\cos 2t) + b^2 \\ &= 2a^2 + b^2 + 3ab\{2\sin^2 t\cos t + (\cos t)(1 - 2\sin^2 t)\} \\ &= 2a^2 + b^2 + 3ab\cos t.\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|^3}\det\begin{pmatrix}\dot{\gamma}\\ \ddot{\gamma}\end{pmatrix} \\ &= \frac{2a^2 + b^2 + 3ab\cos t}{(a^2 + b^2 + 2ab\cos t)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

(4) (3) より,

$$
\begin{aligned}
\dot{\kappa} &= (-3ab\sin t)(a^2+b^2+2ab\cos t)^{-\frac{3}{2}} \\
&\quad + (2a^2+b^2+3ab\cos t)\left(-\frac{3}{2}\right)(a^2+b^2+2ab\cos t)^{-\frac{5}{2}}(-2ab\sin t) \\
&= \frac{(3ab\sin t)\{-(a^2+b^2+2ab\cos t)+2a^2+b^2+3ab\cos t\}}{(a^2+b^2+2ab\cos t)^{\frac{5}{2}}} \\
&= \frac{(3a^2b\sin t)(a+b\cos t)}{(a^2+b^2+2ab\cos t)^{\frac{5}{2}}}.
\end{aligned}
$$

$a > b$ だから, $\dot{\kappa}(t) = 0$ とすると, $\sin t = 0$.
よって,

$$t = 0, \pi, 2\pi$$

だから, 頂点の候補は

$$\gamma(0) = (a+b, 0),\ \gamma(\pi) = (a-b, 0).$$

ここで,

$$\ddot{\kappa} = \frac{(3a^2b\cos t)(a+b\cos t)}{(a^2+b^2+2ab\cos t)^{\frac{5}{2}}} + (3a^2b\sin t)\frac{d}{dt}\frac{a+b\cos t}{(a^2+b^2+2ab\cos t)^{\frac{5}{2}}}.$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
\ddot{\kappa}(0) &= \frac{3a^2b}{(a+b)^4} \\
&> 0
\end{aligned}
$$

だから, κ は $t = 0$ で極小となり,

$$
\begin{aligned}
\ddot{\kappa}(\pi) &= -\frac{3a^2b}{(a-b)^4} \\
&< 0
\end{aligned}
$$

だから, κ は $t = \pi$ で極大となる.
以上より, γ の頂点は $(a \pm b, 0)$.

(5) (4) と同様に, $(a \pm b, 0)$ は γ の頂点.
更に, $a < b$ だから, 方程式

$$a + b\cos t = 0$$

は 2 つの解 t_1, t_2 をもち, $\gamma(t_1), \gamma(t_2)$ も頂点の候補. ただし,

$$\frac{\pi}{2} < t_1 < \pi < t_2 < \frac{3}{2}\pi.$$

(4) と同様に, $\gamma(t_1), \gamma(t_2)$ も γ の頂点.
よって, γ の頂点は 4 つ.