§10. 回転数と全曲率

平面閉曲線に対して回転数という整数を考えることができる.
曲率 κ の弧長により径数付けられた平面閉曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

に対して定積分

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b \kappa(s)ds$$

を γ の回転数という.

定理　平面閉曲線の回転数は整数.

証明　$\{e, n\}$ を弧長により径数付けられた曲率 κ の平面閉曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

に対する Frenet の標構とする.
このとき, $\begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix}$ は SO(2) に値をとるから, $[a, b]$ で定義された関数 θ を用いて,

$$\begin{pmatrix} e(s) \\ n(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(s) & \sin\theta(s) \\ -\sin\theta(s) & \cos\theta(s) \end{pmatrix} \quad (s \in [a, b])$$

と表すことができる.
γ は閉曲線だから,

$$\cos\theta(a) = \cos\theta(b),\ \sin\theta(a) = \sin\theta(b).$$

よって, $\theta(a) - \theta(b)$ は 2π の整数倍.
また,

$$\begin{aligned} e' &= (-\theta' \sin\theta, \theta' \cos\theta) \\ &= \theta' n \end{aligned}$$

だから, Frenet の公式より,

$$\kappa = \theta'.$$

したがって, γ の回転数は

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b \theta'(s)ds = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a))$$

で, これは整数. □

回転数の意味を考えてみよう.
原点中心, 半径 1 の円を S^1 と表すことにする.
$\{e, n\}$ を弧長により径数付けられた曲率 κ の平面閉曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

に対する Frenet の標構とする. このとき, 任意の $s \in [a, b]$ に対して $e(s) \in S^1$ となるから, e は $[a, b]$ から S^1 への写像

$$e : [a, b] \to S^1$$

を定める．このように考えた e を γ に対する Gauss 写像という．同様に, n も $[a,b]$ から S^1 への写像を定めるが, n を Gauss 写像ということもある．
Frenet の公式より,

$$e' = \kappa n$$

だから, κ は Gauss 写像の符号付きの速さを表す.
よって, 回転数は Gauss 写像が行きつ戻りつした分は省いて S^1 を回った回数を表し, 値は整数である.
次に, 曲率の絶対値の積分を考えよう.
曲率 κ の弧長により径数付けられた平面閉曲線

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$$

に対して定積分

$$\int_a^b |\kappa(s)| ds$$

を γ の全曲率という.
κ が Gauss 写像 e の符号付きの速さを表すのに対して, $|\kappa|$ は e の速さを表すことに注意しよう.
よって, 全曲率は e が行きつ戻りつした分すべて込みにして, 進んだ距離を表す.

定理　平面閉曲線の全曲率は 2π 以上.

証明　$\{e,n\}$ を弧長により径数付けられた曲率 κ の平面閉曲線

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$$

に対する Frenet の標構とし,

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) \quad (s \in [a,b])$$

と表しておくと,

$$e(s) = (x'(s), y'(s)).$$

Gauss 写像 e の像が半円より小さいと仮定する.
平面曲線の基本定理より, κ は回転と平行移動を合成しても変わらないから, e の像は上半円にあるとしてよい．すなわち, 任意の $s \in [a,b]$ に対して $y'(s) > 0$.
このとき,

$$\int_a^b y'(s) ds > 0.$$

一方, γ は閉曲線だから,

$$\begin{aligned}\int_a^b y'(s) ds &= y(b) - y(a) \\ &= 0.\end{aligned}$$

これは矛盾.
よって, ある $s_0 \in (a,b)$ が存在し

$$e(a) = -e(s_0)$$

としてよい.

したがって, γ の全曲率は

$$\int_a^{s_0} |\kappa(s)|ds + \int_{s_0}^b |\kappa(s)|ds \geq \pi + \pi = 2\pi.$$

□

上の定理の等号成立条件について調べるには, 単純平面閉曲線に関する次の 2 つの事実が必要である.

定理 γ を単純平面閉曲線とすると, 次の (1)〜(3) は同値.

(1) γ は卵形線.

(2) γ の曲率の符号は変わらない, すなわち曲率は常に 0 以上であるか, 常に 0 以下.

(3) γ の内部の領域は γ の任意の点における接線の片側にある.

定理 単純平面閉曲線の回転数は ± 1.

これらの定理を用いて, 次を示すことができる.

定理 平面閉曲線の全曲率が 2π となるのは卵形線のときに限る.

証明 $\{e, n\}$ を弧長により径数付けられた平面閉曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

に対する Frenet の標構とし,

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) \quad (s \in [a, b])$$

と表しておく.
γ の全曲率が 2π であると仮定する.
まず, γ が単純でないと仮定する.
このとき, ある $s_0 \in (a, b)$ が存在し

$$\gamma(a) = \gamma(s_0)$$

としてよい.
更に, 必要ならば回転を合成することにより, $y'(a), y'(s_0) \geq 0$ としてよい.
このとき, 関数 y は少なくとも 4 つの極値をもつから, 全曲率は 2π より大きい.
これは矛盾.
よって, γ は単純.
次に, ある $s_0 \in [a, b)$ が存在し γ の内部の領域が γ の $s = s_0$ における接線の両側にあると仮定する.
このとき, 必要ならば回転を合成することにより, $e(s_0)$ は x 軸に平行であるとしてよいから, 上と同様に矛盾.
よって, γ は卵形線.
逆に, γ が卵形線であると仮定する.
γ は単純だから, 回転数は ± 1.
また, γ は卵形線だから, 曲率の符号は変わらない.
更に, 全曲率は負とはならないから, γ の全曲率は 2π. □

問題 10

1. Frenet の公式を直接解くことにより, 平面曲線を曲率を用いて表せ.

2. $a, b > 0$ とし, 楕円

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定める. このとき,

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$$

で, §9 においても扱ったように, κ を γ の曲率とすると,

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

である.
定積分を直接計算することにより, γ の回転数を求めよ.

3. 曲率 κ, 回転数 m の弧長により径数付けられた平面閉曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

に対して, ある $c > 0$ が存在し, 任意の $s \in [a, b]$ に対して

$$0 < \kappa(s) \leq c$$

がなりたつとする. このとき, γ の長さは $\dfrac{2\pi m}{c}$ 以上であることを示せ.

4. $\{e, n\}$ を Frenet の標構とする弧長により径数付けられた卵形線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

を考える. このとき, 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$n(s) = (\cos t, \sin t)$$

となる $s \in [a, b)$ が一意的に存在する. また, γ を t の関数とみなすと, $\gamma(t)$ および $\gamma(t + \pi)$ における接線は互いに平行となる. この 2 つの接線の幅を γ の t 方向の幅といい, $W(t)$ と表すことにする.
γ の長さは定積分

$$\int_0^\pi W(t)dt$$

に一致することを示せ. なお, この事実を Cauchy の公式という. また, W が定数の場合は Barbier の定理という.

問題 10 の解答

1. $\{e, n\}$ を弧長により径数付けられた曲率 κ の平面閉曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

に対する Frenet の標構とし, $[a, b]$ で定義された関数 θ を用いて,

$$\begin{pmatrix} e(s) \\ n(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(s) & \sin\theta(s) \\ -\sin\theta(s) & \cos\theta(s) \end{pmatrix} \quad (s \in [a, b])$$

と表しておく.
Frenet の公式より, $\kappa = \theta'$ だから, $s_0 \in [a, b]$ を固定しておくと,

$$\theta(s) = \int_{s_0}^{s} \kappa(s)ds + \theta(s_0) \quad (s \in [a, b]).$$

$e = \gamma'$ だから,

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \int_{s_0}^{s} e(s)ds + \gamma(s_0) \\ &= \left(\int_{s_0}^{s} \cos\theta(s)ds, \int_{s_0}^{s} \sin\theta(s)ds \right) + \gamma(s_0). \end{aligned}$$

2. 弧長径数 s を用いて, 楕円を区間 $[\alpha, \beta]$ からの写像として表しておく.
このとき, 求める回転数は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta} \kappa(s)ds &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \kappa(t)\frac{ds}{dt}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \kappa(t)\|\dot{\gamma}(t)\|dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ab}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ab}{a^2\tan^2 t + b^2}\frac{dt}{\cos^2 t} \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{ab}{a^2x^2 + b^2}dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\tan^{-1}\frac{a}{b}x\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

3. 仮定より,

$$0 < \int_a^b \kappa(s)ds \le \int_a^b c ds.$$

よって,

$$0 < 2\pi m \leq c(b-a).$$

γ の長さは $b-a$ で, $c>0$ だから,

$$b-a \geq \frac{2\pi m}{c}.$$

4. まず,

$$W(t) = -\langle \gamma(t), n(t)\rangle - \langle \gamma(t+\pi), n(t+\pi)\rangle.$$

また,

$$e(s) = (\sin t, -\cos t).$$

よって,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi W(t)dt &= -\int_0^\pi \{\langle \gamma(t), n(t)\rangle + \langle \gamma(t+\pi), n(t+\pi)\rangle\}\, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} \langle \gamma(t), n(t)\rangle dt \\
&= -\int_0^{2\pi} \langle \gamma(t), \dot{e}(t)\rangle\, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} \left\{ \frac{d}{dt}\langle \gamma(t), e(t)\rangle - \langle \dot{\gamma}(t), e(t)\rangle \right\} dt \\
&= -\left[\langle \gamma(t), e(t)\rangle\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \langle \dot{\gamma}(t), e(t)\rangle\, dt.
\end{aligned}$$

ここで, γ は閉曲線だから,

$$\left[\langle \gamma(t), e(t)\rangle\right]_0^{2\pi} = 0.$$

また,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \langle \dot{\gamma}(t), e(t)\rangle\, dt &= \int_0^{2\pi} \left\langle \gamma'(s)\frac{ds}{dt}, e(s) \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle e(s)\frac{ds}{dt}, e(s) \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{ds}{dt}\|e(s)\|^2 dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{ds}{dt} dt \\
&= \int_a^b ds \\
&= b-a.
\end{aligned}$$

したがって, γ の長さは

$$\int_0^\pi W(t)dt.$$