§1. Euclid 距離

数学では極限操作によって望むものを得る場面が多々見られる. 数列の極限, 関数の極限はもちろんのこと, 関数の微分, 積分も極限操作を伴うものである. このような極限操作を行うためには, あたえられた集合に対して位相とよばれる新たな構造を付け加える必要がある. ここでは, 微分積分や線形代数においても現れる重要な位相空間である実 Euclid 空間を例にとり, その上に位相を定める際に用いられる Euclid 距離について述べよう.

自然数全体の集合を $\mathbf{N}$, 実数全体の集合を $\mathbf{R}$ と表す. $n \in \mathbf{N}$ を固定しておき, $\mathbf{R}$ の n 個の直積を $\mathbf{R}^n$ と表す. すなわち,

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

である. $\mathbf{R}^1$ は $\mathbf{R}$ のことである. また, $\mathbf{R}, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ はそれぞれ直線, 平面, 空間と同一視することが多い. 更に, $\mathbf{R}^n$ の元を点ともいう. なお, 微分積分では $\mathbf{R}^n$ の点は上のように表すことが多いが, 線形代数では上のような行ベクトルではなく, 列ベクトルで表すことが多い.

$\mathbf{R}$ における和および積を用いることにより, $\mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間となる. 実際, $\mathbf{R}^n$ の 2 つの元 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ および $c \in \mathbf{R}$ に対して, 和 $x + y \in \mathbf{R}^n$ およびスカラー倍 $cx \in \mathbf{R}^n$ はそれぞれ

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \quad cx = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)$$

により定めればよい. ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ の零ベクトル 0 は $(0, 0, \ldots, 0)$ と表される元である.

更に, $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

を

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

により定める. $\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathbf{R}^n$ の標準内積, $\langle x, y \rangle$ を x と y の内積という. また, ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ に標準内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を考えたものを n 次元実 Euclid 空間, または単に n 次元 Euclid 空間という. x と y の内積 $\langle x, y \rangle$ は行列の積を用いて $x^t y$ と表しておくと, 計算が容易になる場合がある. ただし, ${}^t y$ は y の転置行列である.

以下では, n 次元 Euclid 空間としての $\mathbf{R}^n$ を考える.

定理 $x, y, z \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつ.
(1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
(2) $\langle cx, y \rangle = c\langle x, y \rangle$.
(3) $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$.
(4) $x \neq 0$ ならば, $\langle x, x \rangle > 0$.

一般の $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間に対しても, 上の定理の (1)〜(4) のような性質をもつ実数値関数 $\langle\ ,\ \rangle$ を考えると, 内積空間というものを定義することができる. なお, (1), (2) の性質を線形性, (3) の性質を対称性, (4) の性質を正値性という.

標準内積を用いて, $\mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数

$$\|\ \| : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

を

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める. $n=1$ のとき, $\|x\|$ は実数 x の絶対値 $|x|$ に他ならない. $\|\ \|$ を $\mathbf{R}^n$ のノルム, $\|x\|$ を x のノルムまたは長さという. 定義より, $\|x\| \geq 0$ で, $\|x\| = 0$ となるのは $x = 0$ のときのみである. これをノルムの正値性という.

定理 $x, y \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $\|cx\| = |c|\|x\|$.
(2) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ (Cauchy-Schwarz の不等式).
(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (三角不等式).

証明 (2), (3) のみ示す.
(2): $y = 0$ のときは明らか.
$y \neq 0$ のとき, $\langle y, y\rangle > 0$ に注意すると,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\langle x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y, x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y \right\rangle \langle y, y\rangle \\
&= \left(\langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle + \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle^2}\langle y, y\rangle \right) \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2\|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2.
\end{aligned}$$

よって,

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2.$$

すなわち,

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

(3): (2) より,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

よって,

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

□

ノルムを用いて, $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数

$$d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

を

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in \mathbf{R}^n)$$

により定める. d を $\mathbf{R}^n$ の Euclid 距離, $d(x, y)$ を x と y の Euclid 距離という.

定理 $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $d(x, y) \geq 0$ で, $d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のときのみ (正値性).
(2) $d(y, x) = d(x, y)$ (対称性).
(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式).

証明 (3) のみ示す.

ノルムに関する三角不等式より,

$$\begin{aligned}\|x-z\| &= \|(x-y)+(y-z)\| \\ &\leq \|x-y\|+\|y-z\|.\end{aligned}$$

よって,

$$d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z).$$

□

さて, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $\mathbf{R}^n$ の点列としよう. すなわち, 各 $k \in \mathbf{N}$ に対して, $a_k \in \mathbf{R}^n$ が対応しているとする. $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbf{R}^n$ に収束するとは, $k \in \mathbf{N}$ を十分大きく選べば, a_k を a に限りなく近づけられることをいうのであるが, これは Euclid 距離を用いることによって正確に述べることができる.

定義 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $\mathbf{R}^n$ の点列とし, $a \in \mathbf{R}^n$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $K \in \mathbf{N}$ が存在し, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq K$ ならば, $d(a_k, a) < \varepsilon$ となるとき, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は a に収束するという. このとき, $\lim_{k\to\infty} a_k = a$ または $a_k \to a$ $(k \to \infty)$ と表し, a を $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ の極限という.

例 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}, \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ をそれぞれ $a, b \in \mathbf{R}^n$ に収束する $\mathbf{R}^n$ の点列とする.
収束の定義より, $\varepsilon > 0$ とすると, ある $K_1 \in \mathbf{N}$ が存在し, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq K_1$ ならば,

$$d(a_k, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

また, ある $K_2 \in \mathbf{N}$ が存在し, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq K_2$ ならば,

$$d(b_k, b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ここで, $K \in \mathbf{N}$ を $K = \max\{K_1, K_2\}$ により定める. すなわち, K は K_1, K_2 のうちの小さくない方である. このとき, 三角不等式, Euclid 距離の定義および上の 2 式より, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq K$ ならば,

$$\begin{aligned}\|(a_k+b_k)-(a+b)\| &= \|(a_k-a)+(b_k-b)\| \\ &\leq \|a_k-a\|+\|b_k-b\| \\ &= d(a_k,a)+d(b_k,b) \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

すなわち,

$$d(a_k+b_k, a+b) < \varepsilon.$$

よって,

$$\lim_{k\to\infty}(a_k+b_k) = a+b.$$

問題 1

1. A を n 次の実正方行列とすると, $\mathbf{R}^n$ の任意の 2 点 x, y に対して

$$\langle x, yA \rangle = \langle x^t A, y \rangle$$

がなりたつことを示せ.

2. $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $\mathbf{R}^n$ の点列とする. ある $M > 0$ が存在し, 任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して, $\|a_k\| < M$ となるとき, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は有界であるという.
$\mathbf{R}^n$ の収束する点列は有界であることを示せ.

3. $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ をそれぞれ $a, b \in \mathbf{R}$ に収束する実数列とする. このとき,

$$\lim_{k \to \infty} a_k b_k = ab$$

であることを示せ.

4. $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $a \in \mathbf{R}^n$ に収束する $\mathbf{R}^n$ の点列とする. このとき,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} = a$$

であることを示せ.

問題 1 の解答

1. 標準内積を行列の積を用いて計算すると,

$$\begin{aligned}\langle x, yA\rangle &= x^t(yA)\\ &= x({}^tA^ty)\\ &= (x^tA)^ty\\ &= \langle x^tA, y\rangle.\end{aligned}$$

よって,

$$\langle x, yA\rangle = \langle x^tA, y\rangle.$$

2. $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $a \in \mathbf{R}^n$ に収束する $\mathbf{R}^n$ の点列とし, $\varepsilon > 0$ とする. 収束の定義より, ある $K \in \mathbf{N}$ が存在し, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq K$ ならば,

$$d(a_k, a) < \varepsilon.$$

更に, 三角不等式および Euclid 距離の定義より,

$$\begin{aligned}\|a_k\| &= \|(a_k - a) + a\|\\ &\leq \|a_k - a\| + \|a\|\\ &= d(a_k, a) + \|a\|\\ &< \varepsilon + \|a\|.\end{aligned}$$

よって, $M > 0$ を

$$M = \max\{\|a_1\|, \|a_2\|, \ldots, \|a_{K-1}\|, \varepsilon + \|a\|\}$$

により定めると, 任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して, $\|a_k\| < M$. すなわち, $\mathbf{R}^n$ の収束する点列は有界である.

3. まず, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は収束するから, 有界である. すなわち, ある $M > 0$ が存在し, 任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して, $|a_k| < M$.

次に, $\varepsilon > 0$ とする. $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は a に収束するから, ある $K_1 \in \mathbf{N}$ が存在し, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq K_1$ ならば,

$$d(a_k, a) < \frac{\varepsilon}{M + |b|}.$$

また, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ は b に収束するから, ある $K_2 \in \mathbf{N}$ が存在し, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq K_2$ ならば,

$$d(b_k, b) < \frac{\varepsilon}{M + |b|}.$$

$K \in \mathbf{N}$ を $K = \max\{K_1, K_2\}$ により定めると, 三角不等式, Euclid 距離の定義および上の 2 式より, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq K$ ならば,

$$\begin{aligned}|a_kb_k - ab| &= |(a_kb_k - a_kb) + (a_kb - ab)|\\ &\leq |a_kb_k - a_kb| + |a_kb - ab|\\ &= |a_k||b_k - b| + |b||a_k - a|\\ &= |a_k|d(b_k, b) + |b|d(a_k, a)\\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{M + |b|} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{M + |b|}\\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

すなわち,

$$d(a_k b_k, ab) < \varepsilon.$$

よって,

$$\lim_{k\to\infty} a_k b_k = ab.$$

4. $\varepsilon > 0$ とする. $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は a に収束するから, ある $K_1 \in \mathbf{N}$ が存在し, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq K_1$ ならば,

$$d(a_k, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ここで,

$$M = \max\{d(a_1, a), d(a_2, a), \ldots, d(a_{K_1}, a)\} \tag{$*$}$$

とおく. このとき, 微分積分において扱う Archimedes の原理より,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{K_1 M}{k} = 0$$

だから, ある $K_2 \in \mathbf{N}$ が存在し, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq K_2$ ならば,

$$d\left(\frac{K_1 M}{k}, 0\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

すなわち,

$$\frac{K_1 M}{k} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{$**$}$$

$K \in \mathbf{N}$ を $K = \max\{K_1, K_2\} + 1$ により定めると, 三角不等式, Euclid 距離の定義および $(*)$, $(**)$ より, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq K$ ならば,

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} - a\right\| \\
&= \left\|\frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_k - a)}{k}\right\| \\
&\leq \frac{\|a_1 - a\| + \cdots + \|a_{K_1} - a\|}{k} + \frac{\|a_{K_1+1} - a\| + \cdots + \|a_k - a\|}{k} \\
&= \frac{d(a_1, a) + \cdots + d(a_{K_1}, a)}{k} + \frac{d(a_{K_1+1}, a) + \cdots + d(a_k, a)}{k} \\
&\leq \frac{K_1 M}{k} + \frac{k - K_1}{k}\frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{k - K_1}{k}\frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

すなわち,

$$d\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}, a\right) < \varepsilon.$$

よって,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} = a.$$