§2. Euclid 空間の開集合

 \mathbf{R}^n の点列の収束は開集合という概念を用いても定めることができる. まず, $a \in \mathbf{R}^n$, $\varepsilon > 0$ とする. このとき, Euclid 距離 d を用いて, $B(a;\varepsilon) \subset \mathbf{R}^n$, すなわち \mathbf{R}^n の部分集合 $B(a;\varepsilon)$ を

$$B(a;\varepsilon) = \{x \in \mathbf{R}^n | d(x,a) < \varepsilon\}$$

により定める. $B(a;\varepsilon)$ を a の ε 近傍, または a を中心, ε を半径とする開球体という.

例 (開区間)

n=1 の場合を考える. $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ とすると,

$$B(a; \varepsilon) = \{ x \in \mathbf{R} \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \}.$$

一般に, $a, b \in \mathbf{R}$, a < b のとき, $(a, b) \subset \mathbf{R}$ を

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} | a < x < b\}$$

により定め、これを開区間という、このとき、

$$B(a;\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon), \quad (a,b) = B\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b-a}{2}\right).$$

である.

例 (開円板)

n=2 の場合を考える. $a=(x_0,y_0)\in \mathbf{R}^2, \varepsilon>0$ とすると,

$$B(a;\varepsilon) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \varepsilon^2 \}.$$

このとき, $B(a;\varepsilon)$ を開円板ともいう.

 \mathbf{R}^n の開集合は開球体を用いて、次のように定める.

定義 $O \subset \mathbf{R}^n$ とする. 任意の $a \in O$ に対して, ある $\varepsilon > 0$ が存在し, $B(a; \varepsilon) \subset O$ となるとき, $O \in \mathbf{R}^n$ の開集合という.

例 \mathbf{R}^n 自身は \mathbf{R}^n の開集合である. 実際, 任意の $a \in \mathbf{R}^n$ に対して, 例えば, $B(a;1) \subset \mathbf{R}^n$ である.

注意 1つも元を含まない集合, すなわち空集合 \emptyset は \mathbf{R}^n の開集合であると約束する.

定理 $B(a;\varepsilon)$ は \mathbf{R}^n の開集合.

証明 $b \in B(a; \varepsilon)$ とする. このとき, 開球体の定義より, $d(b, a) < \varepsilon$. よって, $\delta > 0$ を

$$\delta = \varepsilon - d(b, a)$$

により定めることができる.

ここで, $x \in B(b; \delta)$ とすると, 開球体の定義より, $d(x, b) < \delta$. よって, 三角不等式より,

$$d(x, a) \le d(x, b) + d(b, a)$$

$$< \delta + d(b, a)$$

$$= \varepsilon.$$

すなわち, $d(x,a) < \varepsilon$ だから, $x \in B(a;\varepsilon)$. したがって, $B(b;\delta) \subset B(a;\varepsilon)$ だから, 開集合の定義より, $B(a;\varepsilon)$ は \mathbf{R}^n の開集合.

例 1つめの例と上の定理より、開区間は ${f R}$ の開集合である.これが開区間の「開」という言葉の意味である.

 $\S1$ で定めた \mathbb{R}^n の点列の収束に関して、次がなりたつ.

定理 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ を \mathbf{R}^n の点列とし, $a \in \mathbf{R}^n$ とする. このとき, 次の (1), (2) は同値.

- $(1) \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は a に収束する.
- (2) $a \in O$ となる \mathbf{R}^n の任意の開集合 O に対して、ある $K \in \mathbf{N}$ が存在し、 $k \in \mathbf{N}, k \geq K$ ならば、 $a_k \in O$.

証明 (1) \Rightarrow (2): 開集合の定義より, ある $\varepsilon > 0$ が存在し, $B(a; \varepsilon) \subset O$.

ここで、 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は a に収束するから、ある $K \in \mathbb{N}$ が存在し、 $k \in \mathbb{N}$ 、 $k \geq K$ ならば、 $d(a_k, a) < \varepsilon$. すなわち、 $a_k \in B(a; \varepsilon)$.

よって, $k \in \mathbb{N}$, $k \ge K$ ならば,

$$a_k \in B(a; \varepsilon) \subset O$$
.

すなわち, a_k ∈ O.

 $(2) \Rightarrow (1)$: $\varepsilon > 0$ とする. 上の定理より, $B(a; \varepsilon)$ は \mathbf{R}^n の開集合だから, 仮定より, ある $K \in \mathbf{N}$ が存在し, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq K$ ならば, $a_k \in B(a; \varepsilon)$. すなわち, $d(a_k, a) < \varepsilon$. よって, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は a に 収束する.

 \mathbf{R}^n の開集合の性質について更に述べる前に、ここで集合論において扱われる選択公理について、簡単に注意しておこう。まず、有限個の集合からそれぞれの元を一斉に選ぶことは可能である。これに対して、選択公理とは集合の個数が無限個の場合もこのような操作を認めるものである。以下では、選択公理を認める。特に、次の定理では、各 $k \in \mathbf{N}$ に対して、集合 A_k が対応しているとき、各 A_k からそれぞれの元を一斉に選ぶことが可能であることを用いる。この場合の選択公理を可算選択公理ともいう。

定理 $O \subset \mathbf{R}^n$ とする. このとき, 次の (1), (2) は同値.

- (1) O は \mathbb{R}^n の開集合.
- (2) 任意の $a \in O$ および a に収束する \mathbf{R}^n の任意の点列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対して、ある $K \in \mathbf{N}$ が存在し, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq K$ ならば, $a_k \in O$.

証明 $(1) \Rightarrow (2)$: 上の定理の $(1) \Rightarrow (2)$ より, 明らか.

 $(2) \Rightarrow (1)$: 対偶を示す.

Oが \mathbf{R}^n の開集合ではないと仮定する. このとき, ある $a \in O$ が存在し, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $B(a;\varepsilon) \not\subset O$. よって, 可算選択公理より, 各 $k \in \mathbf{N}$ に対して, $a_k \in B\left(a; \frac{1}{k}\right)$ を $a_k \not\in O$ となるように選ぶことができる.

ここで, $\varepsilon' > 0$ とする. このとき, $\frac{1}{K} < \varepsilon'$ となる $K \in \mathbb{N}$ が存在する. $a_k \in B\left(a; \frac{1}{k}\right)$ だから, $k \in \mathbb{N}$, k > K ならば,

$$d(a_k, a) < \frac{1}{k}$$

$$\leq \frac{1}{K}$$

$$\leq \varepsilon'.$$

したがって, \mathbf{R}^n の点列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は a に収束するが, 任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して, $a_k \notin O$.

更に、 \mathbf{R}^n の開集合全体からなる集合系を \mathfrak{O} と表す. すなわち、

$$\mathfrak{O} = \{O|O \ \mathsf{tt} \ \mathbf{R}^n \ \mathsf{o} \ \mathsf{開集合} \}$$

である. \mathfrak{O} を \mathbf{R}^n の開集合系という.

注意 Λ を集合とする. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して, 集合 A_{λ} が対応しているとき, これを $(A_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ と表し, Λ によって添字付けられた集合族という. このとき, Λ を添字集合, Λ の元を添字という.

数学では「族」という言葉は添字付けられたものを考えているという意味を含むことが多いが、集合系と集合族を厳密に区別しない場合もある.

また, 集合族
$$(A_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$$
 に対して, 集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda}$ および $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda}$ を

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda} = \{x | x \in A_{\lambda} \ \& \ \& \ \& \ \& \ \& \ \& \ \land \ \text{ in 存在する } \}, \quad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda} = \{x | \ \text{任意の} \ \& \in \Lambda \ \text{に対して} \ x \in A_{\lambda} \}$$

により定め、それぞれ $(A_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ の和集合、共通部分という。なお、 $\Lambda = \mathbf{N}$ のときは $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda}$ 、 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda}$ をそれぞれ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n}$ 、 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n}$ とも表す。

 \mathbf{R}^n の開集合系 $\mathfrak O$ の基本的な性質は次のようにまとめることができる.

定理 次の(1)~(3)がなりたつ.

- (1) $\mathbf{R}^n, \emptyset \in \mathfrak{O}$.
- $(2) O_1, O_2 \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow \mathfrak{bl}, O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{D}.$
- $(3) (O_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathfrak O$ の元からなる集合族とすると, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_{\lambda} \in \mathfrak O$.

証明 (1) についてはすでに述べたので, (2), (3) を示す.

(2): $a \in O_1 \cap O_2$ とする. このとき, $a \in O_1$. $O_1 \in \mathfrak{O}$ だから, 開集合の定義より, ある $\varepsilon_1 > 0$ が存在し, $B(a; \varepsilon_1) \subset O_1$. 同様に, ある $\varepsilon_2 > 0$ が存在し, $B(a; \varepsilon_2) \subset O_2$.

ここで, $\varepsilon > 0$ を $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ により定める. すなわち, ε は $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ のうちの大きくない方である. このとき, $B(a; \varepsilon) \subset B(a; \varepsilon_1)$ かつ $B(a; \varepsilon) \subset B(a; \varepsilon_2)$ だから,

$$B(a; \varepsilon) \subset B(a; \varepsilon_1) \cap B(a; \varepsilon_2)$$

 $\subset O_1 \cap O_2.$

すなわち, $B(a;\varepsilon) \subset O_1 \cap O_2$. よって, $O_1 \cap O_2$ は \mathbf{R}^n の開集合, すなわち $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$.

(3): $a \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_{\lambda}$ とする. このとき, ある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在し, $a \in O_{\lambda_0}$. $O_{\lambda_0} \in \mathfrak{O}$ だから, 開集合の定

義より, ある $\varepsilon > 0$ が存在し, $B(a; \varepsilon) \subset O_{\lambda_0}$.

更に, $O_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_{\lambda}$ だから, $B(a; \varepsilon) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_{\lambda}$. よって, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_{\lambda}$ は \mathbf{R}^n の開集合, すなわち $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_{\lambda} \in \mathfrak{O}$.

問題2

1. $a \in \mathbf{R}$ に対して, $(-\infty, a)$, $(a, +\infty) \subset \mathbf{R}$ をそれぞれ

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbf{R} | x < a\}, \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} | x > a\}$$

により定める. $(-\infty,a)$, $(a,+\infty)$ は ${\bf R}$ の開集合であることを示せ. なお, $(-\infty,a)$, $(a,+\infty)$ を無限開区間という.

2. O_1 を \mathbf{R}^m の開集合, O_2 を \mathbf{R}^n の開集合とすると, O_1 と O_2 の積, すなわち

$$O_1 \times O_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 \in O_1, x_2 \in O_2\}$$

は \mathbf{R}^{m+n} の開集合であることを示せ.

3. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を \mathbb{N} によって添字付けられた集合族とする. このとき, 集合 $\overline{\lim_{n\to\infty}}$ A_n および $\underline{\lim_{n\to\infty}}$ A_n

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n, \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

により定め、それぞれ $(A_n)_{n\in \mathbb{N}}$ の上極限集合、下極限集合という。すなわち、 $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ は無限個の A_n に含まれる元全体、 $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ は有限個の A_n を除いてそれ以外のすべての A_n に含まれる元全体の集合である。なお、 $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ 、 $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ はそれぞれ $\limsup_{n\to\infty} A_n$ 、 $\liminf_{n\to\infty} A_n$ とも表す。A,B を集合とし、集合族 $(A_n)_{n\in \mathbb{N}}$ を

$$A_{2n} = A, \quad A_{2n-1} = B \quad (n \in \mathbf{N})$$

により定める. このとき, $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ を求めよ.

4. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を N によって添字付けられた集合族とすると, 包含関係

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n \to \infty} A_n$$

がなりたつ. 上の式において, 等号がなりたつとき, これらの集合を $\lim_{n\to\infty}A_n$ と表し, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限集合という. また, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\lim_{n\to\infty}A_n$ に収束するという.

(1) 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して, $A_n \subset A_{n+1}$ ならば,

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

であることを示せ.

(2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $A_n \supset A_{n+1}$ ならば,

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

であることを示せ.

問題2の解答

1. まず, $b \in (-\infty, a)$ とする. このとき, b < a だから, a - b > 0 で, $B(b; a - b) \subset (-\infty, a)$. よって, $(-\infty, a)$ は **R** の開集合.

次に, $b \in (a, +\infty)$ とする. このとき, b > a だから, b - a > 0 で, $B(b; b - a) \subset (a, +\infty)$. よって, $(a, +\infty)$ は $\mathbf R$ の開集合.

2. $a=(a_1,a_2)\in O_1\times O_2\ (a_1\in O_1,\,a_2\in O_2)$ とする. $a_1\in O_1$ で, O_1 は \mathbf{R}^m の開集合だから, ある $\varepsilon_1>0$ が存在し, $B(a_1;\varepsilon_1)\subset O_1$. 同様に, ある $\varepsilon_2>0$ が存在し, $B(a_2;\varepsilon_2)\subset O_2$. ここで, $\varepsilon>0$ を $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ により定める. $x=(x_1,x_2)\in B(a;\varepsilon)\ (x_1\in\mathbf{R}^m,\,x_2\in\mathbf{R}^n)$ とすると, $d(x,a)<\varepsilon$ より,

$$d(x_1, a_1)^2 + d(x_2, a_2)^2 < \varepsilon^2$$

だから, i = 1, 2 とすると,

$$d(x_i, a_i) < \varepsilon$$

$$< \varepsilon_i.$$

すなわち, $d(x_i, a_i) < \varepsilon_i$ だから, $x_i \in B(a_i; \varepsilon_i)$. よって, $x_i \in O_i$ だから, $x \in O_1 \times O_2$. したがって, $B(a; \varepsilon) \subset O_1 \times O_2$ だから, $O_1 \times O_2$ は \mathbf{R}^{m+n} の開集合.

3. まず,

$$\overline{\lim}_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$
$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} (A \cup B)$$
$$= A \cup B$$

また,

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap B)$$

$$= A \cap B$$

4. (1) **ま**ず,

$$\overline{\lim}_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

$$\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

また, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $A_n \subset A_{n+1}$ だから,

$$\underbrace{\lim_{n \to \infty} A_n} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n.$$

一方,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$$

は常になりたつ. したがって,

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^\infty A_n.$$

(2) まず, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $A_n \supset A_{n+1}$ だから,

$$\overline{\lim}_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$
$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

また,

$$\underline{\lim_{n \to \infty}} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$
$$\supset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

よって,

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n.$$

一方,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$$

は常になりたつ.

したがって,

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^\infty A_n.$$