§3. Euclid 空間の閉集合

開集合と対になる概念として, 閉集合というものを考えることができる. $A \subset \mathbf{R}^n$ とする. このとき, $\mathbf{R}^n$ と A の差集合 $\mathbf{R}^n \setminus A$ は

$$\mathbf{R}^n \setminus A = \{x \in \mathbf{R}^n | x \notin A\}$$

によりあたえられる. $\mathbf{R}^n$ を全体集合とする場合は, $\mathbf{R}^n \setminus A$ は A の補集合として表すこともできる. すなわち,

$$\mathbf{R}^n \setminus A = A^c$$

である. そこで, $\mathbf{R}^n \setminus A$ が $\mathbf{R}^n$ の開集合のとき, A を $\mathbf{R}^n$ の閉集合という.

例 $\mathbf{R}^n$ 自身は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である. 実際, $\mathbf{R}^n \setminus \mathbf{R}^n = \emptyset$ で, $\emptyset$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である.
また, $\emptyset$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である. 実際, $\mathbf{R}^n \setminus \emptyset = \mathbf{R}^n$ で, $\mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である.
まとめると, $\mathbf{R}^n$ および $\emptyset$ はともに $\mathbf{R}^n$ の開集合でも閉集合でもある.

例 (閉区間)
$a, b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$ のとき, $[a, b] \subset \mathbf{R}$ を

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\}$$

により定め, これを閉区間という. なお, $a \neq b$ のときの $[a, b]$ を閉区間ということもある.
このとき,

$$\mathbf{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty).$$

問題 2 において扱ったように, $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$ は $\mathbf{R}$ の開集合であり, また, §2 において述べたことより, $\mathbf{R}$ の開集合族の和集合は $\mathbf{R}$ の開集合である. よって, $\mathbf{R} \setminus [a, b]$ は $\mathbf{R}$ の開集合だから, 閉集合の定義より, $[a, b]$ は $\mathbf{R}$ の閉集合である. これが閉区間の「閉」という言葉の意味である.

例 (無限閉区間)
$a \in \mathbf{R}$ に対して, $(-\infty, a], [a, +\infty) \subset \mathbf{R}$ をそれぞれ

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbf{R} | x \leq a\}, \quad [a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} | x \geq a\}$$

により定め, これらを無限閉区間という.
まず,

$$\mathbf{R} \setminus (-\infty, a] = (a, +\infty).$$

$(a, +\infty)$ は $\mathbf{R}$ の開集合だから, 閉集合の定義より, $(-\infty, a]$ は $\mathbf{R}$ の閉集合である.
同様に, $[a, +\infty)$ は $\mathbf{R}$ の閉集合である.

例 $a \in \mathbf{R}^n$ とする. このとき, $b \in \mathbf{R}^n \setminus \{a\}$ とすると, $b \neq a$. よって, Euclid 距離の正値性より, $d(b, a) > 0$ で,

$$B(b; d(b, a)) \subset \mathbf{R}^n \setminus \{a\}.$$

したがって, $\mathbf{R}^n \setminus \{a\}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合だから, 閉集合の定義より, $\{a\}$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である.
なお, a を中心とするどのような単位球 $B(a; \varepsilon)$ に対しても, $B(a; \varepsilon) \not\subset \{a\}$ となるので, $\{a\}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合ではない.

$\mathbf{R}^n$ の閉集合は点列の収束を用いて特徴付けることができる. まず, そのために幾つか準備をしておこう.

定義　$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $\mathbf{R}^n$ の点列とする.

$A \subset \mathbf{R}^n$ とする. 任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して, $a_k \in A$ となるとき, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ を A の点列という.

各 $l \in \mathbf{N}$ に対して, $k_l \in \mathbf{N}$ が対応し, $l, m \in \mathbf{N}$, $l < m$ ならば, $k_l < k_m$ となるとき, $\mathbf{R}^n$ の点列 $\{a_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ を $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ の部分列という.

定理　$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $\mathbf{R}^n$ の点列, $\{a_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ を $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ の部分列とする. $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbf{R}^n$ に収束するならば, $\{a_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ も a に収束する.

証明　$\varepsilon > 0$ とする. まず, $\lim_{k\to\infty} a_k = a$ だから, ある $K \in \mathbf{N}$ が存在し, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq K$ ならば, $d(a_k, a) < \varepsilon$.

ここで, $l \in \mathbf{N}$, $l \geq K$ とすると, $\{a_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ は $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ の部分列だから, $k_l \geq l$. よって, $k_l \geq K$ だから, $d(a_{k_l}, a) < \varepsilon$. したがって, $\lim_{l\to\infty} a_{k_l} = a$. □

さて, 閉集合に関して, 次がなりたつ.

定理　$A \subset \mathbf{R}^n$ とする. このとき, 次の (1), (2) は同値.

(1) A は X の閉集合.

(2) A の点列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbf{R}^n$ に収束するならば, $a \in A$.

証明　(1) ⇒ (2): 背理法により示す.

$a \notin A$ であると仮定する. このとき, 差集合の定義より, $a \in \mathbf{R}^n \setminus A$. 閉集合の定義より, $\mathbf{R}^n \setminus A$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合. よって, §2 で述べたことより, ある $K \in \mathbf{N}$ が存在し, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq K$ ならば, $a_k \in \mathbf{R}^n \setminus A$. これは $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ が A の点列であることに矛盾する. したがって, $a \in A$.

(2) ⇒ (1): 対偶を示す.

A が $\mathbf{R}^n$ の閉集合ではないと仮定する. このとき, $\mathbf{R}^n \setminus A$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合ではない. よって, §2 で述べたことより, ある $a \in \mathbf{R}^n \setminus A$ および a に収束する $\mathbf{R}^n$ の点列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在し, 任意の $l \in \mathbf{N}$ に対して, $k_l \geq l$ となる $k_l \in \mathbf{N}$ で, $a_{k_l} \notin \mathbf{R}^n \setminus A$, すなわち $a_{k_l} \in A$ となるものが存在する. 更に, k_l を $\{a_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ が $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ の部分列となるように選んでおくと, 上の定理より, $\{a_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ は $a \in \mathbf{R}^n \setminus A$ に収束する. □

更に, 閉集合の基本的な性質について調べるために, 集合論において扱われる部分集合族に対する de Morgan の法則について述べておこう.

定義　X を集合, $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_\lambda \subset X$ となる集合族とする. このとき, $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の部分集合族という.

de Morgan の法則　X を集合, $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の部分集合族とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.

(1) $X \setminus \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (X \setminus A_\lambda)$.

(2) $X \setminus \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (X \setminus A_\lambda)$.

証明　(1): 左辺を変形すると,

$$X \setminus \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \left\{ x \in X \,\middle|\, x \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{x \in X \mid \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } x \notin A_\lambda\} \\
&= \{x \in X \mid \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } x \in X \setminus A_\lambda\} \\
&= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus A_\lambda).
\end{aligned}
$$

よって,

$$X \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus A_\lambda).$$

(2): 左辺を変形すると,

$$
\begin{aligned}
X \setminus \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) &= \left\{ x \in X \,\middle|\, x \notin \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right\} \\
&= \{x \in X \mid \text{ある } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } x \notin A_\lambda\} \\
&= \{x \in X \mid \text{ある } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } x \in X \setminus A_\lambda\} \\
&= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus A_\lambda).
\end{aligned}
$$

よって,

$$X \setminus \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus A_\lambda).$$

□

さて, $\mathbf{R}^n$ の閉集合全体からなる集合系を $\mathfrak{A}$ と表す. すなわち,

$$\mathfrak{A} = \{A | A \text{ は } \mathbf{R}^n \text{ の閉集合}\}$$

である. $\mathfrak{A}$ を $\mathbf{R}^n$ の閉集合系という.

定理 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $\mathbf{R}^n, \emptyset \in \mathfrak{A}$.
(2) $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ ならば, $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{A}$.
(3) $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathfrak{A}$ の元からなる集合族とすると, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{A}$.

証明 (1) についてはすでに述べたので, (2), (3) を示す.
(2): 閉集合の定義より, $\mathbf{R}^n \setminus A_1, \mathbf{R}^n \setminus A_2 \in \mathfrak{O}$. よって, de Morgan の法則および開集合系の性質より,

$$\mathbf{R}^n \setminus (A_1 \cup A_2) = (\mathbf{R}^n \setminus A_1) \cap (\mathbf{R}^n \setminus A_2) \in \mathfrak{O}.$$

したがって, 閉集合の定義より, $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{A}$.
(3): 閉集合の定義より, $\mathbf{R}^n \setminus A_\lambda \in \mathfrak{O}$. よって, de Morgan の法則および開集合系の性質より,

$$\mathbf{R}^n \setminus \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathbf{R}^n \setminus A_\lambda) \in \mathfrak{O}.$$

したがって, 閉集合の定義より, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{A}$. □

問題 3

1. $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ とする．このとき, $(a, b] \subset \mathbf{R}$ を

$$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} | a < x \leq b\}$$

により定める．$(a, b]$ は $\mathbf{R}$ の開集合でも閉集合でもないことを示せ．なお, $(a, b]$ を左半開区間という．

同様に, $[a, b) \subset \mathbf{R}$ を

$$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x < b\}$$

により定めると, $[a, b)$ は $\mathbf{R}$ の開集合でも閉集合でもないことが分かる．$[a, b)$ を右半開区間という．また, 開区間, 閉区間, 無限開区間, 無限閉区間, 左半開区間, 右半開区間および $\mathbf{R}$ を単に区間という．

2. X, Y を集合とし, $A \subset X$, $B \subset Y$ とする．このとき,

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))$$

がなりたつことを示せ．

3. A_1 を $\mathbf{R}^m$ の閉集合, A_2 を $\mathbf{R}^n$ の閉集合とすると, $A_1 \times A_2$ は $\mathbf{R}^{m+n}$ の閉集合であることを示せ．

4. $a \in \mathbf{R}^n$ とすると,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B\left(a; \frac{1}{k}\right) = \{a\}$$

であることを示せ．

特に, $\mathbf{R}^n$ の開集合族の共通部分は $\mathbf{R}^n$ の開集合であるとは限らない．また, $\mathbf{R}^n$ の閉集合族の和集合は $\mathbf{R}^n$ の閉集合であるとは限らない．

5. X を集合とする．任意の元が X の部分集合となるような集合系を X の部分集合系という．例えば, $\mathbf{R}^n$ の開集合系および閉集合系はともに $\mathbf{R}^n$ の部分集合系である．

X の部分集合全体からなる集合は X の部分集合系である．これを 2^X または $\mathfrak{P}(X)$ と表し, X の巾集合という．

(1) $X = \emptyset$ のとき, 2^X を求めよ．
(2) $X = \{1, 2\}$ のとき, 2^X を求めよ．
(3) $X = \{1, 2, 3\}$ のとき, 2^X を求めよ．
(4) X の元の個数が n 個のとき, 2^X の元の個数は 2^n 個であることを示せ．

6. X を集合とし, $A, B \subset X$ とすると,

$$A \setminus B = (A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap (X \setminus B)$$

がなりたつことを示せ．

問題 3 の解答

1. まず, $b \in (a,b]$ で, b を中心とするどのような単位球 $B(b;\varepsilon)$ に対しても, $B(b;\varepsilon) \not\subset (a,b]$. よって, $(a,b]$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合ではない.

次に,

$$\mathbf{R} \setminus (a,b] = (-\infty, a] \cup (b, +\infty).$$

よって, $a \in \mathbf{R} \setminus (a,b]$ で, a を中心とするどのような単位球 $B(a;\varepsilon)$ に対しても,

$$B(a;\varepsilon) \not\subset \mathbf{R} \setminus (a,b].$$

したがって, $\mathbf{R} \setminus [a,b]$ は $\mathbf{R}$ の開集合ではないから, $(a,b]$ は $\mathbf{R}$ の閉集合ではない.

2. 左辺を変形すると,

$$\begin{aligned}
(X \times Y) \setminus (A \times B) &= \{(x,y) \in X \times Y | (x,y) \notin A \times B\} \\
&= \{(x,y) \in X \times Y | x \notin A \text{ または } y \notin B\} \\
&= \{(x,y) \in X \times Y | x \in X \setminus A \text{ または } y \in Y \setminus B\} \\
&= \{(x,y) \in X \times Y | (x,y) \in (X \setminus A) \times Y \text{ または } (x,y) \in X \times (Y \setminus B)\} \\
&= ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B)).
\end{aligned}$$

よって,

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B)).$$

3. まず,

$$\mathbf{R}^{m+n} \setminus (A_1 \times A_2) = ((\mathbf{R}^m \setminus A_1) \times \mathbf{R}^n) \cup (\mathbf{R}^m \times (\mathbf{R}^n \setminus A_2)).$$

仮定より, $\mathbf{R}^m \setminus A_1$ は $\mathbf{R}^m$ の開集合. また, $\mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合. よって, $(\mathbf{R}^m \setminus A_1) \times \mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^{m+n}$ の開集合. 同様に, $\mathbf{R}^m \times (\mathbf{R}^n \setminus A_2)$ は $\mathbf{R}^{m+n}$ の開集合.

したがって, $\mathbf{R}^{m+n} \setminus (A_1 \times A_2)$ は $\mathbf{R}^{m+n}$ の開集合だから, $A_1 \times A_2$ は $\mathbf{R}^{m+n}$ の閉集合.

4. まず, 任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して, $a \in B\left(a; \frac{1}{k}\right)$ だから,

$$a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B\left(a; \frac{1}{k}\right).$$

次に,

$$b \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B\left(a; \frac{1}{k}\right), \quad b \neq a$$

であると仮定する. このとき, Euclid 距離の正値性より, $d(b,a) > 0$. よって, ある $k_0 \in \mathbf{N}$ が存在し,

$$\frac{1}{k_0} < d(b,a).$$

一方, 仮定より, $b \in B\left(a; \frac{1}{k_0}\right)$. すなわち,

$$d(b,a) < \frac{1}{k_0}.$$

これは矛盾.

したがって,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B\left(a; \frac{1}{k}\right) = \{a\}.$$

5. (1) $2^X = \{\emptyset\}$.
(2) $2^X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, X\}$.
(3) $2^X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, X\}$.
(4) $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ とすると, n 個のものから k 個のものを選ぶ組み合わせは ${}_nC_k$ 通り. よって, 2^X の元の個数は 2 項展開より,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k &= (1+1)^n \\ &= 2^n.\end{aligned}$$

6. まず, $A \subset A \cup B$ だから,

$$A \setminus B \subset (A \cup B) \setminus B.$$

逆に, $x \in (A \cup B) \setminus B$ とすると, $x \in A \cup B$ かつ $x \notin B$. よって, $x \in A$ かつ $x \notin B$. すなわち, $x \in A \setminus B$ だから,

$$(A \cup B) \setminus B \subset A \setminus B.$$

したがって,

$$A \setminus B = (A \cup B) \setminus B.$$

次に, $A \cap B \subset B$ だから,

$$A \setminus B \subset A \setminus (A \cap B).$$

逆に, $x \in A \setminus (A \cap B)$ とすると, $x \in A$ かつ $x \notin A \cap B$. よって, $x \in A$ かつ $x \in X \setminus (A \cap B)$. de Morgan の法則より,

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$

だから, $x \in A$ かつ $x \in X \setminus B$. すなわち, $x \in A \setminus B$ だから,

$$A \setminus (A \cap B) \subset A \setminus B.$$

したがって,

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

更に,

$$\begin{aligned}A \setminus B &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin B\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \in X \setminus B\} \\ &= A \cap (X \setminus B).\end{aligned}$$

以上より,

$$A \setminus B = (A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap (X \setminus B).$$