§4. 距離空間

Euclid 距離のみたす性質に注目すると, 一般の集合に対しても距離というものを考えることができる.

定義 X を空でない集合とする. $X \times X$ で定義された実数値関数

$$d : X \times X \to \mathbf{R}$$

は任意の $x, y, z \in X$ に対して, 次の (1)〜(3) をみたすとき, X 上の距離関数または単に距離という.

(1) $d(x, y) \geq 0$ で, $d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のときのみ (正値性).
(2) $d(y, x) = d(x, y)$ (対称性).
(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式).

このとき, 組 (X, d) または単に X を距離空間という. また, X の元を点ともいう.

例 (Euclid 空間)
§1 において扱ったように, d を $\mathbf{R}^n$ 上の Euclid 距離とすると, $(\mathbf{R}^n, d)$ は距離空間となる.

Euclid 空間は実内積空間へと一般化することができる.

例 (実内積空間)
$(V, \langle\ ,\ \rangle)$ を実内積空間とする. すなわち, V は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間で, $V \times V$ で定義された実数値関数

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbf{R}$$

は任意の $x, y, z \in V$, $c \in \mathbf{R}$ に対して, 次の (1)〜(4) をみたす.

(1) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.
(2) $\langle cx, y\rangle = c\langle x, y\rangle$.
(3) $\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle$.
(4) $x \neq 0$ ならば, $\langle x, x\rangle > 0$.

例えば, Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ は実内積空間である.
このとき, V のノルム

$$\|\ \| : V \to \mathbf{R}$$

が

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad (x \in V)$$

により定められる. そこで, $V \times V$ で定義された実数値関数

$$d : V \times V \to \mathbf{R}$$

を

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in V)$$

により定める.
Euclid 空間の場合と同様に, d は V 上の距離となる. このようにして, 実内積空間は自然に距離空間となる.

例 (離散距離空間)

X を空でない集合とする．このとき, $X \times X$ で定義された実数値関数

$$d : X \times X \to \mathbf{R}$$

を

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & (x = y), \\ 1 & (x \neq y) \end{cases}$$

により定める．

定義より, d が正値性および対称性をみたすことは明らかである．

ここで, $x, y, z \in X$ とする．まず, $x = z$ のとき,

$$\begin{aligned} d(x, z) &= 0 \\ &\leq d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

次に, $x \neq z$ のとき, $x \neq y$ または $y \neq z$ だから, $d(x, y) = 1$ または $d(y, z) = 1$. よって,

$$\begin{aligned} d(x, z) &= 1 \\ &\leq d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

したがって, d は三角不等式をみたす．

以上より, d は X 上の距離となる．d を離散距離という．また, (X, d) を離散距離空間または単に離散空間という．

例　X を空でない集合とし, X で定義された有界な実数値関数全体の集合を $B(X)$ と表すことにする．すなわち,

$$B(X) = \{f : X \to \mathbf{R} | \text{ある } M > 0 \text{ が存在し任意の } x \in X \text{ に対して } |f(x)| < M\}$$

である．

ここで, $f, g \in B(X)$ とする．このとき, ある $M_1, M_2 > 0$ が存在し, 任意の $x \in X$ に対して, $|f(x)| < M_1$, $|g(x)| < M_2$ だから, 絶対値に関する三角不等式より,

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| < M_1 + M_2$$

となる．微分積分において扱う Weierstrass の定理より, $\mathbf{R}$ の空でない, 上に有界な部分集合は上限をもつから,

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| | x \in X\}$$

とおくと, $d(f, g)$ は 0 以上の実数である．

更に, 絶対値が距離の性質をみたすことと d の定義を用いると, d は $B(X)$ 上の距離となる．

例 (部分距離空間)

(X, d) を距離空間, A を X の空でない部分集合とする．このとき, d の $A \times A$ への制限

$$d|_{A \times A} : A \times A \to \mathbf{R}$$

を考えることができる．すなわち,

$$d|_{A \times A}(x, y) = d(x, y) \quad (x, y \in A)$$

である.

d が X 上の距離であることより, $d|_{A\times A}$ は A 上の距離となる. $(A, d|_{A\times A})$ を X の部分距離空間または単に部分空間という. このようにして, 距離空間の空でない部分集合は自然に距離空間となる. なお, $d|_{A\times A}$ は単に d と表すことも多い.

$\mathbf{R}^n$ の場合と同様に, 距離空間に対しても点列の収束を考えることができる.

定義 (X, d) を距離空間とする.

各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, $a_n \in X$ が対応しているとき, これを $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と表し, X の点列という.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の点列とし, $a \in X$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば, $d(a_n, a) < \varepsilon$ となるとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束するという. このとき, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ または $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ と表し, a を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限という.

定理 距離空間の点列が収束するならば, その極限は一意的である.

証明 (X, d) を距離空間, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a, b \in X$ に収束する X の点列とし, $\varepsilon > 0$ とする.

まず, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ だから, ある $N_1 \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N_1$ ならば, $d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. また, $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ だから, ある $N_2 \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N_2$ ならば, $d(a_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$.

ここで, $N \in \mathbf{N}$ を $N = \max\{N_1, N_2\}$ により定める. このとき, 三角不等式および d の対称性より, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば,

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leq d(a, a_n) + d(a_n, b) \\ &= d(a_n, a) + d(a_n, b) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

すなわち, $d(a, b) < \varepsilon$. ε は任意だから, $d(a, b) = 0$. よって, d の正値性より, $a = b$. すなわち, 距離空間の点列が収束するならば, その極限は一意的である. □

その他にも, Euclid 空間の点列に関する様々な概念は距離空間に対しても, 同様に考えることができる.

定義 (X, d) を距離空間, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の点列とする. ある $M > 0$ が存在し, 任意の $m, n \in \mathbf{N}$ に対して, $d(a_m, a_n) < M$ となるとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界であるという.

なお, 上の定義は X が Euclid 空間の場合は問題 1 において定めたものと同値であることが分かる. また, 次がなりたつ.

定理 距離空間の収束する点列は有界である.

定義 (X, d) を距離空間, $A \subset \mathbf{R}^n$ とする. 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して, $a_n \in A$ となるとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を A の点列という.

各 $k \in \mathbf{N}$ に対して, $n_k \in \mathbf{N}$ が対応し, $k, l \in \mathbf{N}$, $k < l$ ならば, $n_k < n_l$ となるとき, X の点列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列という.

§3 において扱った場合と同様に, 次がなりたつ.

定理 (X, d) を距離空間, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の点列, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列とする. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in X$ に収束するならば, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ も a に収束する.

問題 4

1. V を $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間とする．ただし, $\mathbf{C}$ は複素数全体の集合である．$V \times V$ で定義された複素数値関数

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbf{C}$$

が任意の $z, w, v \in V$, $c \in \mathbf{C}$ に対して, 次の (i)〜(iv) をみたすとき, $\langle z, w\rangle$ を z と w の Hermite 内積または複素内積, 組 $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ または単に V を複素内積空間または複素計量ベクトル空間という．

$$\begin{aligned}
&\text{(i) } \langle z+w, v\rangle = \langle z, v\rangle + \langle w, v\rangle.\\
&\text{(ii) } \langle cz, w\rangle = c\langle z, w\rangle.\\
&\text{(iii) } \langle w, z\rangle = \overline{\langle z, w\rangle}.\\
&\text{(iv) } z \neq 0 \text{ ならば, } \langle z, z\rangle > 0.
\end{aligned}$$

ただし, (iii) において, $^{-}$ は複素共役を表す．なお, (i), (ii) の性質を半線形性, (iii) の性質を共役対称性, (iv) の性質を正値性という．例えば, n 次元複素数ベクトル空間 $\mathbf{C}^n$ は標準 Hermite 内積に関して複素内積空間となることが分かる．これを n 次元複素 Euclid 空間という．

$(V, \langle\ ,\ \rangle)$ を複素内積空間とする．

(1) $z, w \in V$, $c \in \mathbf{C}$ とすると,

$$\langle z, cw\rangle = \bar{c}\langle z, w\rangle$$

がなりたつことを示せ．なお, この性質も半線形性という．

(2) $z \in V$ とし, 0 を V の零ベクトルとする．$\langle z, 0\rangle$ の値を求めよ．

(3) Hermite 内積の正値性および (2) より, V で定義された実数値関数

$$\|\ \| : V \to \mathbf{R}$$

を

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z\rangle} \quad (z \in V)$$

により定めることができる．このとき, $\|z\| \geq 0$ で, $\|z\| = 0$ となるのは $z = 0$ のときのみである．$\|\ \|$ を V のノルム, $\|z\|$ を z のノルムまたは長さという．

$z \in V$, $c \in \mathbf{C}$ とすると,

$$\|cz\| = |c|\|z\|$$

がなりたつことを示せ．ただし, $|\ |$ は複素数の絶対値を表す．

(4) Cauchy-Schwarz の不等式

$$|\langle z, w\rangle| \leq \|z\|\|w\| \quad (z, w \in V)$$

がなりたつことを示せ．

(5) 三角不等式

$$\|z+w\| \leq \|z\| + \|w\| \quad (z, w \in V)$$

がなりたつことを示せ．

更に,

$$d(z, w) = \|z - w\| \quad (z, w \in V)$$

とおくと, d は V 上の距離となることが分かる．

問題 4 の解答

1. (1) Hermite 内積の共役対称性および半線形性より,

$$\begin{aligned}\langle z, cw\rangle &= \overline{\langle cw, z\rangle}\\ &= \overline{c\langle w, z\rangle}\\ &= \bar{c}\overline{\langle w, z\rangle}\\ &= \bar{c}\langle z, w\rangle.\end{aligned}$$

よって,

$$\langle z, cw\rangle = \bar{c}\langle z, w\rangle.$$

(2) Hermite 内積の半線形性より,

$$\begin{aligned}\langle z, 0\rangle &= \langle z, 0\cdot 0\rangle\\ &= \bar{0}\langle z, 0\rangle\\ &= 0\langle z, 0\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

(3) Hermite 内積の半線形性より,

$$\begin{aligned}\|cz\|^2 &= \langle cz, cz\rangle\\ &= c\bar{c}\langle z, z\rangle\\ &= |c|^2\|z\|^2.\end{aligned}$$

よって,

$$\|cz\|^2 = |c|^2\|z\|^2.$$

すなわち,

$$\|cz\| = |c|\|z\|.$$

(4) $w = 0$ のとき, (2) より,

$$|\langle z, 0\rangle| = \|z\|\|0\| = 0$$

となり, Cauchy-Schwarz の不等式がなりたつ.

$w \neq 0$ のとき, $\langle w, w\rangle > 0$ に注意すると, Hermite 内積の正値性, 半線形性および共役対称性より,

$$\begin{aligned}0 &\leq \left\langle z - \frac{\langle z, w\rangle}{\langle w, w\rangle}w, z - \frac{\langle z, w\rangle}{\langle w, w\rangle}w\right\rangle\langle w, w\rangle\\ &= \left(\langle z, z\rangle - \frac{\overline{\langle z, w\rangle}}{\langle w, w\rangle}\langle z, w\rangle - \frac{\langle z, w\rangle}{\langle w, w\rangle}\langle w, z\rangle + \frac{\langle z, w\rangle\overline{\langle z, w\rangle}}{\langle w, w\rangle^2}\langle w, w\rangle\right)\langle w, w\rangle\\ &= \|z\|^2\|w\|^2 - |\langle z, w\rangle|^2.\end{aligned}$$

よって,

$$|\langle z, w\rangle|^2 \leq \|z\|^2\|w\|^2.$$

すなわち,

$$|\langle z, w\rangle| \leq \|z\|\|w\|.$$

(5) Cauchy-Schwarz の不等式より,

$$\begin{aligned}
\|z+w\|^2 &= \langle z+w, z+w\rangle \\
&= \langle z,z\rangle + \langle z,w\rangle + \langle w,z\rangle + \langle w,w\rangle \\
&= \langle z,z\rangle + \langle z,w\rangle + \overline{\langle z,w\rangle} + \langle w,w\rangle \\
&\leq \langle z,z\rangle + 2|\langle z,w\rangle| + \langle w,w\rangle \\
&\leq \|z\|^2 + 2\|z\|\|w\| + \|w\|^2 \\
&= (\|z\| + \|w\|)^2.
\end{aligned}$$

よって,

$$(\|z+w\|)^2 \leq (\|z\| + \|w\|)^2 .$$

すなわち,

$$\|z+w\| \leq \|z\| + \|w\|.$$