§5. 距離空間の開集合と閉集合

Euclid 空間の場合と同様に, 距離空間に対しても開集合や閉集合といった概念を定めることができる.

定義 (X, d) を距離空間とする.
$a \in X$, $\varepsilon > 0$ とする. このとき, $B(a;\varepsilon) \subset X$ を

$$B(a;\varepsilon) = \{x \in X | d(x,a) < \varepsilon\}$$

により定める. $B(a;\varepsilon)$ を a の ε 近傍, または a を中心, ε を半径とする開球体という.
$O \subset X$ とする. 任意の $a \in O$ に対して, ある $\varepsilon > 0$ が存在し, $B(a;\varepsilon) \subset O$ となるとき, O を X の開集合という.

例 X を距離空間とする. このとき, X 自身は X の開集合である. 実際, 任意の $a \in X$ に対して, 例えば, $B(a;1) \subset X$ である.

注意 空集合は任意の距離空間の開集合であると約束する.

Euclid 空間の場合と同様に, 次の 3 つの定理がなりたつ.

定理 X を距離空間とし, $a \in X$, $\varepsilon > 0$ とする. このとき, $B(a;\varepsilon)$ は X の開集合.

定理 X を距離空間, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の点列とし, $a \in X$ とする. このとき, 次の (1), (2) は同値.

(1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束する.
(2) $a \in O$ となる X の任意の開集合 O に対して, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば, $a_n \in O$.

定理 X を距離空間とし, $O \subset X$ とする. このとき, 次の (1), (2) は同値.

(1) O は X の開集合.
(2) 任意の $a \in O$ および a に収束する X の任意の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば, $a_n \in O$.

更に, 距離空間 X に対して, X の開集合全体からなる集合系を $\mathfrak{O}$ と表す. $\mathfrak{O}$ を X の開集合系という. このとき, Euclid 空間の場合と同様に, 次がなりたつ.

定理 X を距離空間とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $X, \emptyset \in \mathfrak{O}$.
(2) $O_1, O_2 \in \mathfrak{O}$ ならば, $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$.
(3) $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathfrak{O}$ の元からなる集合族とすると, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$.

例 (X, d) を §4 において述べた離散距離空間とし, $a \in X$ とする. このとき, d の定義より, $B\left(a; \frac{1}{2}\right) = \{a\}$. よって, 1 つめの定理より, $\{a\}$ は X の開集合である.
したがって, 上の定理の (3) より, X の任意の部分集合は X の開集合となるから, $\mathfrak{O} = 2^X$. ただし, 2^X は問題 3 でも述べた X の巾集合である.

次に, 距離空間の閉集合について述べよう.

定義 X を距離空間とし, $A \subset X$ とする. $X \setminus A$ が X の開集合のとき, A を X の閉集合という.

例 X を距離空間とする.

このとき, X 自身は X の閉集合である. 実際, $X \setminus X = \emptyset$ で, $\emptyset$ は X の開集合である.
また, $\emptyset$ は X の閉集合である. 実際, $X \setminus \emptyset = X$ で, X は X の開集合である.
まとめると, X および $\emptyset$ はともに X の開集合でも閉集合でもある.

例　X を距離空間とし, $a \in X$ とする. このとき, Euclid 空間の場合と同様に, $\{a\}$ は X の閉集合である.

なお, X が Euclid 空間の場合は, §3 において述べたように, $\{a\}$ は X の開集合ではない. 一方, X が離散距離空間の場合は, 2 つめの例において述べたように, $\{a\}$ は X の開集合でもある.

距離空間の閉集合に関しても, Euclid 空間の場合と同様に, 次がなりたつ.

定理　X を距離空間とし, $A \subset X$ とする. このとき, 次の (1), (2) は同値.

(1) A は X の閉集合.
(2) A の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in X$ に収束するならば, $a \in A$.

更に, 距離空間 X に対して, X の閉集合全体からなる集合系を $\mathfrak{A}$ と表す. $\mathfrak{A}$ を X の閉集合系という. このとき, Euclid 空間の場合と同様に, 次がなりたつ.

定理　X を距離空間とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $X, \emptyset \in \mathfrak{A}$.
(2) $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ ならば, $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{A}$.
(3) $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathfrak{A}$ の元からなる集合族とすると, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{A}$.

例　X を離散距離空間とする. このとき, 2 つめの例より, X の任意の部分集合は X の開集合であるから, X の任意の部分集合は閉集合でもある. よって, $\mathfrak{A} = 2^X$.

1 つの集合に対する距離は様々なものを考えることができるが, 距離によっては同じ点列でも収束することもあれば, 収束しないこともある.

例　(X, d) を離散距離空間, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a \in X$ に収束する X の点列とする. このとき, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば, $d(a_n, a) < \frac{1}{2}$. よって, 離散距離の定義より, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば, $a_n = a$.

特に, $\mathbf{R}$ に対して離散距離を考えると, $\mathbf{R}$ の点列 $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しない. 一方, $\mathbf{R}$ に対して Euclid 距離を考えると, Archimedes の原理より, $\mathbf{R}$ の点列 $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する.

定理　X を空でない集合, d, d' を X 上の距離とする. このとき, 次の (1)〜(3) は同値.

(1) 任意の $a \in X$ および X の任意の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が d に関して a に収束するならば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は d' に関して a に収束する.
(2) X の d' に関する開集合は X の d に関する開集合.
(3) X の d' に関する閉集合は X の d に関する閉集合.

証明　(1) $\Rightarrow$ (3): A を X の d' に関する閉集合とする. このとき, $a \in X$ とし, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を d に関して a に収束する A の点列とする. 5 つめの定理より, $a \in A$ であることを示せばよい.

仮定より, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は d' に関して a に収束する. A は X の d' に関する閉集合だから, 5 つめの定理より, $a \in A$.
(3) $\Rightarrow$ (2): O を X の d' に関する開集合とする. このとき, $X \setminus O$ は X の d' に関する閉集合. 仮定より, $X \setminus O$ は X の d に関する閉集合. よって, O は X の d に関する開集合.

(2) ⇒ (1): $a \in X$ とし, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を d に関して a に収束する X の点列とする. $\varepsilon > 0$ とし, d' に関する a の ε 近傍を $B'(a;\varepsilon)$ と表す.

仮定より, $B'(a;\varepsilon)$ は X の d に関する開集合. よって, ある $\delta > 0$ が存在し, $B(a;\delta) \subset B'(a;\varepsilon)$. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は d に関して a に収束するから, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば, $a_n \in B(a;\delta)$. したがって, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば, $a_n \in B'(a;\varepsilon)$. すなわち, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は d' に関して a に収束する.

以上より, (1)〜(3) は同値. □

上の定理より, 1 つの集合に対して 2 つの距離を考えたとき, 同じ点列がそれぞれの距離に関して収束するか否かが一致するのはそれぞれの開集合系あるいは閉集合系が一致するときである. このようなとき, 2 つの距離は同じ位相を定めるという.

1 つの集合に対する 2 つの距離が同じ位相を定めるための十分条件は次のようにあたえることができる.

定理 X を空でない集合, d, d' を X 上の距離とする. ある $c, c' > 0$ が存在し, 任意の $x, y \in X$ に対して,

$$cd(x,y) \leq d'(x,y) \leq c'd(x,y)$$

がなりたつならば, d と d' は X に同じ位相を定める.

証明 O を X の d に関する開集合とし, $a \in O$ とする. このとき, ある $\varepsilon > 0$ が存在し, $B\left(a;\frac{\varepsilon}{c}\right) \subset O$. ここで, d' に関する a の ε 近傍を $B'(a;\varepsilon)$ と表す. $x \in B'(a;\varepsilon)$ とすると, 上の不等式より,

$$\begin{aligned} d(x,a) &\leq \frac{1}{c}d'(x,a) \\ &< \frac{\varepsilon}{c}. \end{aligned}$$

よって, $B'(a;\varepsilon) \subset B\left(a;\frac{\varepsilon}{c}\right)$. したがって, $B'(a;\varepsilon) \subset O$ だから, O は X の d' に関する開集合である.

同様に, 残りの不等式を用いることにより, X の d' に関する開集合は X の d に関する開集合となる.

以上より, d と d' は X に同じ位相を定める. □

例 $x, y \in \mathbf{R}^n$ を

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

と表しておき,

$$d'(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad d''(x,y) = \max\{|x_i - y_i| | i = 1, 2, \ldots, n\}$$

とおく. このとき, d', d'' は X 上の距離を定めることが分かる. d', d'' をそれぞれ Manhattan 距離, Tchebychev 距離という.

ここで, d を $\mathbf{R}^n$ の Euclid 距離とすると, 不等式

$$d(x,y) \leq d'(x,y) \leq nd''(x,y) \leq nd(x,y)$$

がなりたつ. よって, 上の定理より, d, d', d'' は何れも $\mathbf{R}^n$ に同じ位相を定める. 特に断らない限り, $\mathbf{R}^n$ に対しては, これらと同じ位相を定める距離を考える. また, $\mathbf{C}^n$ に対しては, 複素 Euclid 空間と同じ位相を定める距離を考える.

問題 5

1. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とし, $X \times Y$ で定義された実数値関数

$$d' : X \times Y \to \mathbf{R}$$

を

$$d'((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_Y(y, y')$$

により定める. ただし, $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ である.

(1) d' は $X \times Y$ 上の距離となることを示せ. なお, 距離空間 $(X \times Y, d')$ を X と Y の直積距離空間または単に直積空間, 積空間という. また, $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ に対して,

$$d((x, y), (x', y')) = \sqrt{(d_X(x, x'))^2 + (d_Y(y, y'))^2},$$
$$d''((x, y), (x', y')) = \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}$$

とおくと, d, d'' も X 上の距離を定め, Euclid 空間の場合と同様に, d, d', d'' は何れも X に同じ位相を定める. 特に, 直積距離空間の距離は上の 3 つの距離のうちの何れを用いてもよい.

(2) $(a, b) \in X \times Y$ とする. $(X \times Y, d')$ の点列 $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が (a, b) に収束することと X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束し, Y の点列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が b に収束することは同値であることを示せ.

2. (X, d) を距離空間とし, $X \times X$ で定義された実数値関数

$$d' : X \times X \to \mathbf{R}$$

を

$$d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} \quad ((x, y) \in X \times X)$$

により定める.

(1) 定義より, d' は正値性および対称性をみたす. 更に, d' は三角不等式をみたすことを示せ. 特に, d' は X 上の距離となる.

(2) d と d' は X に同じ位相を定めることを示せ.

問題 5 の解答

1. (1) $(x,y),(x',y'),(x'',y'')\in X\times Y$ とする.

まず, d_X は X 上の距離だから, 正値性より, $d_X(x,x')\geq 0$ で, $d_X(x,x')=0$ となるのは $x=x'$ のときのみ. 同様に, $d_Y(y,y')\geq 0$ で, $d_Y(y,y')=0$ となるのは $y=y'$ のときのみ. よって, $d'((x,y),(x',y'))\geq 0$ で, $d'((x,y),(x',y'))=0$ となるのは

$$d_X(x,x')=d_Y(y,y')=0$$

のときだから, $x=x'$, $y=y'$, すなわち $(x,y)=(x',y')$ のときのみ. したがって, d' は正値性をみたす.

次に, d_X および d_Y は対称性をみたすから,

$$\begin{aligned}d'((x',y'),(x,y))&=d_X(x',x)+d_Y(y',y)\\&=d_X(x,x')+d_Y(y,y')\\&=d'((x,y),(x',y')).\end{aligned}$$

すなわち,

$$d'((x',y'),(x,y))=d'((x,y),(x',y')).$$

よって, d' は対称性をみたす.

更に, d_X および d_Y は三角不等式をみたすから,

$$\begin{aligned}d'((x,y),(x'',y''))&=d_X(x,x'')+d_Y(y,y'')\\&\leq d_X(x,x')+d_X(x',x'')+d_Y(y,y')+d(y',y'')\\&=d_X(x,x')+d_Y(y,y')+d_X(x',x'')+d(y',y'')\\&=d'((x,y),(x',y'))+d((x',y'),(x'',y'')).\end{aligned}$$

すなわち,

$$d'((x,y),(x'',y''))\leq d'((x,y),(x',y'))+d'((x',y'),(x'',y'')).$$

よって, d' は三角不等式をみたす.

以上より, d' は $X\times Y$ 上の距離.

(2) まず, $\{(a_n,b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が (a,b) に収束すると仮定する.

このとき, $\varepsilon>0$ とすると, ある $N\in\mathbf{N}$ が存在し, $n\in\mathbf{N}$, $n\geq N$ ならば, $d'(a_n,a)<\varepsilon$. よって, d' の定義より, $n\in\mathbf{N}$, $n\geq N$ ならば, $d_X(a_n,a)<\varepsilon$, $d_Y(b_n,b)<\varepsilon$. したがって, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束し, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は b に収束する.

逆に, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束し, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が b に収束すると仮定する.

このとき, $\varepsilon>0$ とすると, ある $N_1\in\mathbf{N}$ が存在し, $n\in\mathbf{N}$, $n\geq N_1$ ならば, $d_X(a_n,a)<\frac{\varepsilon}{2}$. また, ある $N_2\in\mathbf{N}$ が存在し, $n\in\mathbf{N}$, $n\geq N_2$ ならば, $d_Y(b_n,b)<\frac{\varepsilon}{2}$. よって, $n\in\mathbf{N}$, $n\geq\max\{N_1,N_2\}$ ならば,

$$\begin{aligned}d'((a_n,b_n),(a,b))&=d_X(a_n,a)+d_Y(b_n,b)\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\&=\varepsilon.\end{aligned}$$

すなわち, $d'((a_n, b_n), (a, b)) < \varepsilon$. したがって, $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は (a, b) に収束する.

2. (1) $x, y, z \in X$ とする.

$d'(x, y), d'(y, z) < 1$ のとき, d' の定義より,

$$d'(x, y) = d(x, y), \quad d'(y, z) = d(y, z)$$

更に, d は三角不等式をみたすから,

$$\begin{aligned} d'(x, z) &= \min\{1, d(x, z)\} \\ &\leq d(x, z) \\ &\leq d(x, y) + d(y, z) \\ &= d'(x, y) + d'(y, z). \end{aligned}$$

すなわち,

$$d'(x, z) \leq d'(x, y) + d'(y, z).$$

$d'(x, y) = 1$ のとき, d' の正値性より, $d'(y, z) \geq 0$. よって,

$$\begin{aligned} d'(x, z) &= \min\{1, d(x, z)\} \\ &\leq 1 \\ &\leq 1 + d'(y, z) \\ &= d'(x, y) + d'(y, z). \end{aligned}$$

すなわち,

$$d'(x, z) \leq d'(x, y) + d'(y, z).$$

$d'(y, z) = 1$ のときも同様に, 上の式がなりたつ.

したがって, d' は三角不等式をみたす.

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の点列とし, $a \in X$ とする.

まず, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が d に関して a に収束すると仮定する.

このとき, $\varepsilon > 0$ とすると, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば, $d(a_n, a) < \varepsilon$. よって, $d'(a_n, a) \leq d(a_n, a)$ より, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば, $d'(a_n, a) < \varepsilon$. したがって, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は d' に関して a に収束する.

逆に, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が d' に関して a に収束すると仮定する.

このとき, $\varepsilon > 0$ とすると, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば, $d'(a_n, a) < \min\{1, \varepsilon\}$. よって, d' の定義より, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば,

$$\begin{aligned} d(a_n, a) &= d'(a_n, a) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

すなわち, $d(a_n, a) < \varepsilon$. したがって, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は d に関して a に収束する.

以上より, d と d' は X に同じ位相を定める.