§6. 距離空間の間の連続写像

ここでは, 距離空間の間の写像の連続性について考えよう. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, f を X から Y への写像とし, $a \in X$ とする. f が a で連続であるとは, X の点 x が a に限りなく近づくとき, $f(x)$ が $f(a)$ に限りなく近づくことをいうのであるが, これは次のように正確に述べることができる.

定義 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, f を X から Y への写像とする.
$a \in X$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在し, $x \in X$, $d_X(x, a) < \delta$ ならば, $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ となるとき, f は a で連続であるという.
f が任意の $a \in X$ で連続なとき, f は連続であるという.
特に, $\mathbf{R}$ や $\mathbf{C}$ への連続写像を連続関数ともいう.

例 $n \in \mathbf{N}$ とし, $\mathbf{R}$ で定義された実数値関数 f を

$$f(x) = x^n \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定める.
$x \in \mathbf{R}$ とし, $a \in \mathbf{R}$ を固定しておくと, 絶対値の性質および三角不等式より,

$$\begin{aligned}
|x^n - a^n| &= |(x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}| \\
&= |x-a| \left| \sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-1-k} \right| \\
&\leq |x-a| \sum_{k=0}^{n-1} |a^k x^{n-1-k}| \\
&= |x-a| \sum_{k=0}^{n-1} |a|^k |x|^{n-1-k} \\
&\leq |x-a| \left(|a| + |x|\right)^{n-1} \\
&= |x-a| \left(|a| + |(x-a)+a|\right)^{n-1} \\
&\leq |x-a| \left(2|a| + |x-a|\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

ここで, $\varepsilon > 0$ とし, $\delta > 0$ を

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{(2|a|+1)^{n-1}}\right\}$$

により定める. $x \in \mathbf{R}$, $|x - a| < \delta$ とすると, 上の計算より,

$$\begin{aligned}
|x^n - a^n| &< \delta \left(2|a| + 1\right)^{n-1} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

すなわち, $|x^n - a^n| < \varepsilon$. よって, f は a で連続である. 更に, a は任意だから, f は連続関数である.

例 (等長写像)
(X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, f を X から Y への写像とする. f が距離を保つとき, すなわち任意の $x, x' \in X$ に対して,

$$d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$$

となるとき, f を等長写像という.

定義より, 等長写像は連続である. 実際, $\varepsilon > 0$ とすると, $d_X(x, x') < \varepsilon$ ならば, $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ である.

なお, 等長写像は単射である. 実際, 上の式において, $f(x) = f(x')$ と仮定すると, d_Y の正値性より,

$$\begin{aligned} d_X(x, x') &= d_Y(f(x), f(x')) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり, 更に, d_X の正値性より, $x = x'$ となるからである.

距離空間の間の写像の合成に対して, その連続性を考えてみよう.

定理 (X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z) を距離空間, f を X から Y への写像, g を Y から Z への写像とし, $a \in X$ とする. f が a で連続で, g が $f(a)$ で連続ならば, 合成写像 $g \circ f$ は a で連続.

特に, f, g が連続ならば, $g \circ f$ は連続.

証明 $\varepsilon > 0$ とする.

まず, g は $f(a)$ で連続だから, ある $\delta > 0$ が存在し, $y \in Y$, $d_Y(y, f(a)) < \delta$ ならば, $d_Z(g(y), g(f(a))) < \varepsilon$. すなわち, $d_Z(g(y), (g \circ f)(a)) < \varepsilon$.

次に, f は a で連続だから, ある $\rho > 0$ が存在し, $x \in X$, $d_X(x, a) < \rho$ ならば, $d_Y(f(x), f(a)) < \delta$.

よって, $x \in X$, $d_X(x, a) < \rho$ ならば, $d_Z((g \circ f)(x), (g \circ f)(a)) < \varepsilon$. すなわち, $g \circ f$ は a で連続. □

距離空間の間の写像の連続性は点列の収束を用いて特徴付けることができる.

定理 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, f を X から Y への写像とし, $a \in X$ とする. このとき, 次の (1), (2) は同値.

(1) f は a で連続.

(2) a に収束する X の任意の点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ に対して, Y の点列 $\{f(a_n)\}_{n=1}^\infty$ は $f(a)$ に収束する.

証明 (1) $\Rightarrow$ (2): $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ を a に収束する X の点列とし, $\varepsilon > 0$ とする. 仮定より, ある $\delta > 0$ が存在し, $x \in X$, $d_X(x, a) < \delta$ ならば, $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$. ここで, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は a に収束するから, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば, $d_X(a_n, a) < \delta$. よって, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば, $d_Y(f(a_n), f(a)) < \varepsilon$. したがって, $\{f(a_n)\}_{n=1}^\infty$ は $f(a)$ に収束する.

(2) $\Rightarrow$ (1): 背理法により示す.

f が a で連続でないと仮定する. このとき, ある $\varepsilon > 0$ が存在し, 任意の $\delta > 0$ に対して, $d_X(x, a) < \delta$ となる $x \in X$ で, $d_Y(f(x), f(a)) > \varepsilon$ となるものが存在する. よって, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, $d_X(a_n, a) < \frac{1}{n}$ となる $a_n \in X$ で, $d_Y(f(a_n), f(a)) > \varepsilon$ となるものが存在する. このとき, X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は a に収束するが, Y の点列 $\{f(a_n)\}_{n=1}^\infty$ は $f(a)$ に収束しない. これは矛盾. したがって, f は a で連続. □

更に, 距離空間の間の連続写像は開集合や閉集合を用いて特徴付けることができる.

定理 X, Y を距離空間, f を X から Y への写像とする. このとき, 次の (1)〜(3) は同値.

(1) f は連続.

(2) f による Y の任意の開集合の逆像は X の開集合.

(3) f による Y の任意の閉集合の逆像は X の閉集合.

証明　(1) $\Rightarrow$ (2): O を Y の開集合とする.
　$O = \emptyset$ のとき,

$$\begin{aligned} f^{-1}(O) &= f^{-1}(\emptyset) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

よって, $f^{-1}(O)$ は X の開集合.
　$O \neq \emptyset$ のとき, $a \in f^{-1}(O)$ とすると, $f(a) \in O$. O は Y の開集合だから, ある $\varepsilon > 0$ が存在し, $B_Y(f(a);\varepsilon) \subset O$. ただし, $B_Y(f(a);\varepsilon)$ は $f(a)$ の ε 近傍である. ここで, f は連続だから, ある $\delta > 0$ が存在し,

$$f(B_X(a;\delta)) \subset B_Y(f(a);\varepsilon).$$

ただし, $B_X(a;\delta)$ は a の δ 近傍である. よって,

$$\begin{aligned} B_X(a;\delta) &\subset f^{-1}(B_Y(f(a);\varepsilon)) \\ &\subset f^{-1}(O). \end{aligned}$$

すなわち, $B_X(a;\delta) \subset f^{-1}(O)$. したがって, $f^{-1}(O)$ は X の開集合.
　以上より, f による Y の任意の開集合の逆像は X の開集合.
(2) $\Rightarrow$ (1): $a \in X$, $\varepsilon > 0$ とする. $B_Y(f(a);\varepsilon)$ は Y の開集合だから, 仮定より, ある $\delta > 0$ が存在し, $B_X(a;\delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(a);\varepsilon))$. よって,

$$f(B_X(a;\delta)) \subset B_Y(f(a);\varepsilon).$$

すなわち, f は a で連続である. 更に, a は任意だから, f は連続である.
(2) $\Rightarrow$ (3): A を Y の閉集合とする. このとき, $Y \setminus A$ は Y の開集合で,

$$\begin{aligned} X \setminus f^{-1}(A) &= f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(A) \\ &= f^{-1}(Y \setminus A). \end{aligned}$$

よって, 仮定より, $X \setminus f^{-1}(A)$ は X の開集合. したがって, $f^{-1}(A)$ は X の閉集合. すなわち, f による Y の任意の閉集合の逆像は X の閉集合.
(3) $\Rightarrow$ (2): (2) $\Rightarrow$ (3) の証明と同様. □

　2 つの距離空間の間に全単射が存在し, その全単射を通して点列が収束するか否かが一致する場合, 位相空間論ではこれらの距離空間は同じものとみなすことが多い. そこで, 次のように定める.

定義　X, Y を距離空間とする.
　f を X から Y への写像とする. f が全単射で, f および f^{-1} が連続なとき, f を同相写像という.
　X から Y への同相写像が存在するとき, X と Y は同相であるという.

　上の定理より, 直ちに次がなりたつ.

定理　X を空でない集合, d, d' を X 上の距離とする. このとき, 次の (1), (2) は同値.

(1) d, d' は X に同じ位相を定める.
(2) X 上の恒等写像 1_X は (X,d) から (X,d') への同相写像.

問題 6

1. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, f を X から Y への写像とする. ある $L > 0$ が存在し, 任意の $x, x' \in X$ に対して,

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq L d_X(x, x')$$

となるならば, f は連続であることを示せ. なお, 上の条件をみたす f は Lipschitz 連続であるという.

2. $\mathbf{K}$ を $\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$, V を $\mathbf{K}$ 上のベクトル空間とし, V で定義された $\mathbf{K}$ に値をとる関数

$$\| \ \| : V \to \mathbf{K}$$

が任意の $x, y \in V$, $c \in \mathbf{K}$ に対して, 次の (i)〜(iii) をみたすとする.

(i) $\|x\| \geq 0$ で, $\|x\| = 0$ となるのは $x = 0$ のときのみ.

(ii) $\|cx\| = |c|\|x\|$.

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

なお, (i) の性質を正値性, (iii) の性質を三角不等式, $\| \ \|$ を V のノルム, $\|x\|$ を x のノルム, 組 $(V, \| \ \|)$ または単に V をノルム空間という. 例えば, 実内積空間, 複素内積空間はそれぞれ内積, Hermite 内積から定まるノルムにより, ノルム空間となる.

このとき,

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in V)$$

とおくと, d は V 上の距離となり, ノルム空間は自然に距離空間となる. $\mathbf{K}^n$ から V への線形写像は連続であることを示せ.

3. 閉区間 $[a, b]$ は $\mathbf{R}$ の部分集合だから, $\mathbf{R}$ の部分空間となる. 特に, $\mathbf{R}$ で定義された実数値連続関数の $[a, b]$ への制限は $[a, b]$ で定義された実数値連続関数となる.

$[a, b]$ で定義された実数値連続関数全体の集合を $C[a, b]$ と表すことにする. $f, g \in C[a, b]$, $c \in \mathbf{R}$ に対して,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x) \quad (x \in [a, b])$$

とおくと, $f + g, cf \in C[a, b]$ となり, $C[a, b]$ は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間となることが分かる. 更に,

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx \quad (f \in C[a, b])$$

とおくと, $\| \ \|$ は $C[a, b]$ のノルムとなることが分かる.

(1) $C[a, b]$ から $\mathbf{R}$ への写像 Φ を

$$\Phi(f) = f(b) \quad (f \in C[a, b])$$

により定める. Φ は線形写像であることを示せ.

(2) (1) において, $a = 0$, $b = 1$ とし, $C[0, 1]$ の点列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を

$$f_n(x) = x^n \quad (x \in [0, 1])$$

により定める. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ および $\{\Phi(f_n)\}_{n=1}^\infty$ の極限を調べることにより, Φ は連続ではないことを示せ.

問題 6 の解答

1. $a \in X$, $\varepsilon > 0$ とする. このとき, $\delta > 0$ を $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ により定める. 仮定より, $x \in X$, $d_X(x, a) < \delta$ ならば,

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(a)) &\leq L d_X(x, a) \\ &< L \cdot \frac{\varepsilon}{L} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

すなわち, $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$. よって, f は a で連続. 更に, a は任意だから, f は連続.

2. f を $\mathbf{K}^n$ から V への線形写像, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ を $\mathbf{K}^n$ の基底, $\|\ \|$ を $\mathbf{K}^n$ の標準内積または標準 Hermite 内積から定まるノルム, $\|\ \|_V$ を V のノルム, d, d_V をそれぞれ $\|\ \|$, $\|\ \|_V$ から定まる $\mathbf{K}^n$, V 上の距離とする.

$x \in V$ を

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{K})$$

と表しておくと, f が線形写像であることとノルムの性質より,

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_V &= \left\| f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \right\|_V \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \right\|_V \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i f(e_i)\|_V \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|f(e_i)\|_V \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_V\right) \|x\|. \end{aligned}$$

よって, $x, y \in V$ とすると,

$$\begin{aligned} d_V(f(x), f(y)) &= \|f(x) - f(y)\|_V \\ &= \|f(x - y)\|_V \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_V\right) \|x - y\| \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_V\right) d(x, y). \end{aligned}$$

すなわち, f は Lipschitz 連続となる. したがって, f は連続である.

3. (1) $f, g \in C[a, b]$, $c \in \mathbf{R}$ とする.

まず,

$$\begin{aligned} \Phi(f + g) &= (f + g)(b) \\ &= f(b) + g(b) \\ &= \Phi(f) + \Phi(g). \end{aligned}$$

すなわち,

$$\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g).$$

また,

$$\begin{aligned}\Phi(cf) &= (cf)(b)\\ &= cf(b)\\ &= c\Phi(f).\end{aligned}$$

すなわち,

$$\Phi(cf) = c\Phi(f).$$

よって, Φ は線形写像.

(2) まず,

$$\begin{aligned}\|f_n - 0\| &= \int_0^1 |x^n - 0| dx\\ &= \int_0^1 x^n dx\\ &= \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

よって, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する.

ここで, $\Phi(0) = 0$ で, $n \in \mathbf{N}$ とすると,

$$\begin{aligned}\Phi(f_n) &= 1^n\\ &= 1.\end{aligned}$$

よって, $\Phi(f_n)$ は 1 に収束し, $\Phi(0)$ には収束しない.

したがって, Φ は 0 で連続ではない. 特に, Φ は連続ではない.