§7. 距離空間の近傍

距離空間の点列の収束や距離空間の間の写像の連続性は近傍というものを用いて特徴付けることもできる.

定義 X を距離空間とし, $x \in X$, $U \subset X$ とする.
X のある開集合 O が存在し, $x \in O \subset U$ となるとき, x を U の内点という.
x が U の内点のとき, U を x の近傍という. X の開集合または閉集合となる近傍はそれぞれ開近傍, 閉近傍ともいう.

例 X を距離空間, O を X の空でない開集合とし, $x \in O$ とする. このとき, x は O の内点である. また, O は x の開近傍である.

§5 や §6 において, 距離空間の点列の収束や距離空間の間の写像の連続性は開集合を用いて特徴付けられることを述べた. 次の 2 つの定理のように, これらは開集合の代わりに近傍を用いてもよい. 証明も同様である.

定理 X を距離空間, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の点列とし, $a \in X$ とする. このとき, 次の (1), (2) は同値.

(1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束する.
(2) a の任意の近傍 U に対して, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば, $a_n \in U$.

定理 X, Y を距離空間, f を X から Y への写像とし, $a \in X$ とする. このとき, 次の (1), (2) は同値.

(1) f は a で連続.
(2) f による $f(a)$ の任意の近傍の逆像は a の近傍.

X を距離空間とし, $A \subset X$ とする. このとき, A の内点全体の集合を A^i または $\mathring{A}$ と表し, A の内部という. 定義より,

$$A^i = \bigcup \{O \subset A | O \text{ は } X \text{ の開集合}\}$$

がなりたつ. 特に, 開集合の性質より, A^i は A に含まれる X の最大の開集合である. また, A が X の開集合であるための必要十分条件は $A^i = A$ である.

例 $\mathbf{R}$ の部分集合である開区間および閉区間の内点や内部について考える. $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ とする.
まず, 開区間 (a, b) は $\mathbf{R}$ の開集合である. よって, 任意の $x \in (a, b)$ は (a, b) の内点である. したがって, $(a, b)^i = (a, b)$.
次に, 閉区間 $[a, b]$ を考え, $x \in [a, b]$ とする. このとき, $a < x < b$ ならば, x は $[a, b]$ の内点である. また, $x = a, b$ ならば, x は $[a, b]$ の内点ではない. よって, $[a, b]^i = (a, b)$.

内点や内部と対になる概念として, 外点や外部というものを考えることができる. X を距離空間とし, $A \subset X$ とする. このとき, $(X \setminus A)^i$ の点を A の外点という. また, A の外点全体の集合, すなわち $(X \setminus A)^i$ を A^e と表し, A の外部という. X を全体集合とすると, A の外点とは A^c の内点のことであり, $A^e = (A^c)^i$ である. また, 定義より, A^e は X の開集合である.

例 上の例のように, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ とし, $\mathbf{R}$ の部分集合である開区間 (a, b) および閉区間 $[a, b]$ の外点や外部について考える.
まず,

$$\mathbf{R} \setminus (a, b) = (-\infty, a] \cup [b, +\infty).$$

よって, $x \in \mathbf{R} \setminus (a,b)$ とすると, $x < a$ または $x > b$ ならば, x は $\mathbf{R} \setminus (a,b)$ の内点だから, (a,b) の外点である. また, $x = a, b$ ならば, x は $\mathbf{R} \setminus (a,b)$ の内点ではないから, (a,b) の外点ではない. したがって,

$$(a,b)^e = (-\infty, a) \cup (b, +\infty).$$

次に,

$$\mathbf{R} \setminus [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty).$$

右辺は $\mathbf{R}$ の開集合の和集合だから, $\mathbf{R}$ の開集合である. よって, 任意の $x \in \mathbf{R} \setminus [a,b]$ は $\mathbf{R} \setminus [a,b]$ の内点だから, $[a,b]$ の外点である. したがって,

$$[a,b]^e = (-\infty, a) \cup (b, +\infty).$$

更に, 内点でも外点でもない点を考えよう. X を距離空間とし, $A \subset X$ とする. A の内点でも外点でもない点を A の境界点という. また, A の境界点全体の集合を ∂A と表し, A の境界という.

内部, 外部, 境界の定義より, X は互いに交わらない部分集合 A^i, A^e, ∂A の和集合となる. すなわち, 直和を表す記号 $\sqcup$ を用いると,

$$X = A^i \sqcup A^e \sqcup \partial A \tag{$*$}$$

である. 特に, A^i および A^e が X の開集合であることより, ∂A は X の閉集合となる.

例 2 つめと 3 つめの例より, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ とすると, $\mathbf{R}$ の部分集合である開区間 (a,b) および閉区間 $[a,b]$ について, これらの境界点は a または b である. よって,

$$\partial(a,b) = \partial[a,b] = \{a, b\}.$$

さて, 距離空間 X の部分集合 A の内部 A^i とは A に含まれる X の最大の開集合であった. これに対して, A を含む最小の閉集合を考えよう. これを $\overline{A}$ と表し, A の閉包という. すなわち,

$$\overline{A} = \bigcap \{F \supset A | F \text{ は } X \text{ の閉集合}\}$$

である. $\overline{A}$ の点を A の触点という. 特に, A が X の閉集合であるための必要十分条件は $\overline{A} = A$ である.

X を全体集合とすると, $\overline{A}$ は A の補集合の内部の補集合あるいは A の外部の補集合, すなわち

$$\overline{A} = \left((A^c)^i\right)^c = (A^e)^c$$

である. 実際, de Morgan の法則より,

$$\begin{aligned}
\left(\overline{A}\right)^c &= X \setminus \overline{A} \\
&= X \setminus \bigcap \{F \supset A | F \text{ は } X \text{ の閉集合}\} \\
&= \bigcup \{X \setminus F \subset X \setminus A | F \text{ は } X \text{ の閉集合}\} \\
&= \bigcup \{O \subset X \setminus A | O \text{ は } X \text{ の開集合}\} \\
&= (X \setminus A)^i \\
&= (A^c)^i \\
&= A^e
\end{aligned}$$

となり, 等式

$$\left(\overline{A}\right)^c = (A^c)^i = A^e$$

がなりたつから, 更に補集合を取ればよい. 特に, $(*)$ と合わせると,

$$\overline{A} = A^i \sqcup \partial A$$

である.

例　2 つめから 4 つめまでの例のように, 開区間 (a, b) および閉区間 $[a, b]$ について考えると,

$$\begin{aligned}\overline{(a,b)} &= (a,b)^i \sqcup \partial(a,b) \\ &= (a,b) \sqcup \{a,b\} \\ &= [a,b].\end{aligned}$$

また, $[a, b]$ は $\mathbf{R}$ の閉集合だから, $\overline{[a,b]} = [a, b]$.

最後に, 集積点, 導集合, 孤立点といった概念について述べておこう. X を距離空間とし, $x \in X$, $A \subset X$ とする. x が $A \setminus \{x\}$ の触点, すなわち $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ のとき, x を A の集積点という. また, A の集積点全体の集合を A^d と表し, A の導集合という. 更に, $A \setminus A^d$ の点を A の孤立点という.

閉包と導集合に関して, 次がなりたつ.

定理　X を距離空間とし, $A \subset X$ とすると,

$$\overline{A} = A \cup A^d.$$

証明　まず, $x \in \overline{A}$ とする. $x \notin A$ のとき, $A = A \setminus \{x\}$ だから,

$$\begin{aligned}x &\in \overline{A} \\ &= \overline{A \setminus \{x\}}.\end{aligned}$$

すなわち, $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. よって, $x \in A^d$. したがって,

$$\overline{A} \subset A \cup A^d.$$

次に, $A \subset \overline{A}$ は常になりたつ. また, $x \in A^d$ とすると,

$$\begin{aligned}x &\in \overline{A \setminus \{x\}} \\ &\subset \overline{A}.\end{aligned}$$

すなわち, $x \in \overline{A}$. よって, $A^d \subset \overline{A}$. したがって,

$$A \cup A^d \subset \overline{A}.$$

以上より,

$$\overline{A} = A \cup A^d.$$

□

問題 7

1. X を距離空間とし, $A, B \subset X$ とする. このとき, 次の (1)〜(3) がなりたつことを示せ.
(1) $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$.
(2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(3) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$.

2. X を距離空間とし, $A \subset X$ とする.
(1) A が X の開集合であるための必要十分条件は $A \cap \partial A = \emptyset$ であることを示せ.
(2) A が X の閉集合であるための必要十分条件は $\partial A \subset A$ であることを示せ.

3. X, Y を距離空間, f を X から Y への写像とする. f が連続ならば, 任意の $A \subset X$ に対して, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ がなりたつことを示せ. なお, 逆もなりたつことが分かる.

問題 7 の解答

1. (1) まず, $A \cap B \subset A$ だから,

$$(A \cap B)^i \subset A^i.$$

また, $A \cap B \subset B$ だから,

$$(A \cap B)^i \subset B^i.$$

よって,

$$(A \cap B)^i \subset A^i \cap B^i.$$

次に, $x \in A^i \cap B^i$ とする. $x \in A^i$ だから, X のある開集合 O_1 が存在し,

$$x \in O_1 \subset A.$$

また, $x \in B^i$ だから, X のある開集合 O_2 が存在し,

$$x \in O_2 \subset B.$$

このとき, $O_1 \cap O_2$ は X の開集合で,

$$x \in O_1 \cap O_2 \subset A \cap B.$$

よって, $x \in (A \cap B)^i$. したがって,

$$A^i \cap B^i \subset (A \cap B)^i.$$

以上より,

$$(A \cap B)^i = A^i \cap B^i.$$

(2) X を全体集合とすると, de Morgan の法則および (1) より,

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup B} &= \Big(((A \cup B)^c)^i\Big)^c \\
&= \Big((A^c \cap B^c)^i\Big)^c \\
&= \Big((A^c)^i \cap (B^c)^i\Big)^c \\
&= \Big((A^c)^i\Big)^c \cup \Big((B^c)^i\Big)^c \\
&= \overline{A} \cup \overline{B}.
\end{aligned}$$

よって,

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

(3) まず, $x \in (A \cup B)^d$ とする. (2) より,

$$\begin{aligned}
x &\in \overline{(A \cup B) \setminus \{x\}} \\
&= \overline{(A \setminus \{x\}) \cup (B \setminus \{x\})} \\
&= \overline{A \setminus \{x\}} \cup \overline{B \setminus \{x\}}.
\end{aligned}$$

すなわち, $x \in \overline{A \setminus \{x\}} \cup \overline{B \setminus \{x\}}$. よって, $x \in A^d \cup B^d$. したがって,

$$(A \cup B)^d \subset A^d \cup B^d.$$

次に, $A \subset A \cup B$ だから,

$$A^d \subset (A \cup B)^d.$$

また, $B \subset A \cup B$ だから,

$$B^d \subset (A \cup B)^d.$$

よって,

$$A^d \cup B^d \subset (A \cup B)^d.$$

以上より,

$$(A \cup B)^d = A^d \cup B^d.$$

2. (1) まず,

$$\begin{aligned} A &\subset \overline{A} \\ &= A^i \sqcup \partial A. \end{aligned} \tag{$*$}$$

すなわち,

$$A \subset A^i \sqcup \partial A.$$

よって,

$$\begin{aligned} A &= (A^i \cap A) \sqcup (\partial A \cap A) \\ &= A^i \sqcup (A \cap \partial A). \end{aligned}$$

したがって,

$$A \setminus A^i = A \cap \partial A.$$

A が X の開集合であるための必要十分条件は $A^i = A$ だから, $A^i \subset A$ であることと上の式より, これは $A \cap \partial A = \emptyset$ と同値.

(2) まず,

$$\begin{aligned} \overline{A} &= A^i \sqcup \partial A \\ &\subset A \cup \partial A. \end{aligned}$$

すなわち,

$$\overline{A} \subset A \cup \partial A.$$

A が X の閉集合であるための必要十分条件は $\overline{A} = A$ だから, $A \subset \overline{A}$ であることと上の式より, これは $\partial A \subset A$ と同値.

3. $f(A) \subset \overline{f(A)}$ だから,

$$\begin{aligned} A &\subset f^{-1}(f(A)) \\ &\subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right). \end{aligned}$$

すなわち, $A \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$. ここで, $\overline{f(A)}$ は Y の閉集合で, f は連続だから, $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ は X の閉集合. よって, 閉包の定義より, $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. したがって, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.