§8. 位相空間

距離空間の開集合系のみたす性質に注目し, 一般の集合に対して, 位相という構造を考えることができる.

定義 X を空でない集合, $\mathfrak{O}$ を X の部分集合系とする. $\mathfrak{O}$ は次の (1)〜(3) をみたすとき, 位相という.

(1) $X, \emptyset \in \mathfrak{O}$.

(2) $O_1, O_2 \in \mathfrak{O}$ ならば, $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$.

(3) $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathfrak{O}$ の元からなる集合族とすると, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$.

このとき, 組 $(X, \mathfrak{O})$ または単に X を位相空間という. また, X の元を点ともいう. 更に, $\mathfrak{O}$ の元を X の開集合という. また, $\mathfrak{O}$ を X の開集合系ともいう.

位相空間の基本的な例を幾つか挙げよう.

例 (X, d) を距離空間とする. このとき, d により定まる X の開集合系 $\mathfrak{O}$ は X の位相となる. よって, $(X, \mathfrak{O})$ は位相空間である.

逆に, 位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ に対して, X 上の距離 d が存在し, d により定まる X の開集合系が $\mathfrak{O}$ と一致する場合がある. このとき, $(X, \mathfrak{O})$ または単に $\mathfrak{O}$ は d により距離付け可能であるという.

例 (密着空間)

X を空でない集合とする. このとき, X の部分集合系 $\{\emptyset, X\}$ は X の位相となる. この位相を密着位相という. 密着位相を考えた位相空間 $(X, \{\emptyset, X\})$ を密着位相空間または単に密着空間という.

2 つ以上の元を含む密着空間は距離付け可能ではない. 実際, X を異なる 2 点 p, q を含み, 距離 d により距離付け可能な密着空間であると仮定すると, $B\left(p, \frac{1}{2}d(p,q)\right)$ は p を含むが q は含まない X の開集合となり, これは密着空間の開集合が $\emptyset$ と X のみであることに矛盾する.

例 (離散空間)

X を空でない集合とする. このとき, X の巾集合 2^X は X の位相となる. この位相を離散位相という. 離散位相を考えた位相空間 $(X, 2^X)$ を離散位相空間または単に離散空間という.

離散空間は §4 で述べた離散距離により距離付け可能である.

例 まず, X を 1 つの元のみからなる集合とする. このとき, X に対して考えることのできる位相は $\{\emptyset, X\}$ のみで, $(X, \{\emptyset, X\})$ は位相空間である.

次に, X を 2 つの元 p, q からなる集合とする. このとき, X に対して考えることのできる位相は

$$\mathfrak{O}_1 = \{\emptyset, X\}, \quad \mathfrak{O}_2 = \{\emptyset, \{p\}, X\}, \quad \mathfrak{O}_3 = \{\emptyset, \{q\}, X\}, \quad \mathfrak{O}_4 = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, X\}$$

の 4 通りで, $(X, \mathfrak{O}_1)$〜$(X, \mathfrak{O}_4)$ は何れも位相空間である. 特に, $(X, \mathfrak{O}_1)$ は密着空間, $(X, \mathfrak{O}_4)$ は離散空間である. また, $(X, \mathfrak{O}_2)$ または $(X, \mathfrak{O}_3)$ を Sierpinski 空間ともいう.

なお, 有限集合に対して考えることのできる位相の個数を簡単に表す式は知られていない.

§4 において, 距離空間の部分集合は部分距離空間となることを述べた. このことは一般の位相空間の部分集合に対して, 次の定理のように一般化することができる.

定理 $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とし, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ とする. このとき, A の部分集合系 $\mathfrak{O}_A$ を

$$\mathfrak{O}_A = \{O \cap A \mid O \in \mathfrak{O}\}$$

により定めると, 次の (1)〜(3) がなりたつ. 特に, $\mathfrak{O}_A$ は A の位相となる.
(1) $A, \emptyset \in \mathfrak{O}_A$.
(2) $O_1, O_2 \in \mathfrak{O}_A$ ならば, $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}_A$.
(3) $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathfrak{O}_A$ の元からなる集合族とすると, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}_A$.

証明 (1): まず, $A = X \cap A$ で, $X \in \mathfrak{O}$ だから, $A \in \mathfrak{O}_A$.
次に, $\emptyset = \emptyset \cap A$ で, $\emptyset \in \mathfrak{O}$ だから, $\emptyset \in \mathfrak{O}_A$.
(2): 仮定より, $O_1 = O_1' \cap A$, $O_2 = O_2' \cap A$ となる $O_1', O_2' \in \mathfrak{O}$ が存在する. このとき,

$$\begin{aligned} O_1 \cap O_2 &= (O_1' \cap A) \cap (O_2' \cap A) \\ &= (O_1' \cap O_2') \cap A. \end{aligned}$$

ここで, $O_1', O_2' \in \mathfrak{O}$ だから, $O_1' \cap O_2' \in \mathfrak{O}$. よって, $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}_A$.
(3): 仮定より, $O_\lambda = O_\lambda' \cap A$ となる $O_\lambda' \in \mathfrak{O}$ が存在する. このとき,

$$\begin{aligned} \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda &= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (O_\lambda' \cap A) \\ &= \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda' \right) \cap A. \end{aligned}$$

ここで, $O_\lambda' \in \mathfrak{O}$ だから, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda' \in \mathfrak{O}$. よって, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}_A$. □

上の定理において, $\mathfrak{O}_A$ を A の $\mathfrak{O}$ に関する相対位相, 組 $(A, \mathfrak{O}_A)$ を X の部分位相空間または単に部分空間という. 位相空間の部分集合の位相については相対位相を考えることが多い.

§5 において, 距離空間の点列の収束を開集合を用いて特徴付けた. このことに注目すると, 一般の位相空間に対しても点列の収束を考えることができる.

定義 $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とする.
各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, $a_n \in X$ が対応しているとき, これを $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ と表し, X の点列という.
$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ を X の点列とし, $a \in X$ とする. $a \in O$ となる任意の $O \in \mathfrak{O}$ に対して, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば, $a_n \in O$ となるとき, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は a に収束するという. このとき, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ または $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ と表し, a を $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の極限という.

注意 距離空間の点列の極限は一意的であったが, 一般の位相空間の場合はそうとは限らない. 例えば, 密着空間の任意の点列は任意の点に収束する.

距離空間の場合と同様に, 位相空間についても閉集合を考えることができる.

定義 X を位相空間とし, $A \subset X$ とする. $X \setminus A$ が X の開集合のとき, A を X の閉集合という.

例 X を位相空間とする. 距離空間の場合と同様に, X および $\emptyset$ はともに X の開集合でも閉集合でもある.

更に, 位相空間 X に対して, X の閉集合全体からなる集合系を $\mathfrak{A}$ と表す. $\mathfrak{A}$ を X の閉集合系という. このとき, 距離空間の場合と同様に, 次がなりたつ.

定理 X を位相空間とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $X, \emptyset \in \mathfrak{A}$.
(2) $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ ならば, $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{A}$.

(3) $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathfrak{A}$ の元からなる集合族とすると, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{A}$.

§7 において述べた様々な概念は一般の位相空間に対しても考えることができる. まず, 内点と近傍を定義しよう.

定義 X を位相空間とし, $x \in X$, $U \subset X$ とする.

X のある開集合 O が存在し, $x \in O \subset U$ となるとき, x を U の内点という.

x が U の内点のとき, U を x の近傍という. X の開集合または閉集合となる近傍はそれぞれ開近傍, 閉近傍ともいう.

例 X を位相空間, O を X の空でない開集合とし, $x \in O$ とする. このとき, x は O の内点である. また, O は x の開近傍である.

次に, 内部, 外点, 外部, 境界点, 境界を順に定義しよう. X を位相空間とし, $A \subset X$ とする. このとき, A の内点全体の集合を A^i または $\mathring{A}$ と表し, A の内部という. 定義より,

$$A^i = \bigcup\{O \subset A | O \text{ は } X \text{ の開集合}\}$$

がなりたつ. 特に, 開集合の性質より, A^i は A に含まれる X の最大の開集合である. また, A が X の開集合であるための必要十分条件は $A^i = A$ である.

$(X \setminus A)^i$ の点を A の外点という. また, A の外点全体の集合, すなわち $(X \setminus A)^i$ を A^e と表し, A の外部という. X を全体集合とすると, A の外点とは A^c の内点のことであり, $A^e = (A^c)^i$ である. また, 定義より, A^e は X の開集合である.

A の内点でも外点でもない点を A の境界点という. また, A の境界点全体の集合を ∂A と表し, A の境界という.

内部, 外部, 境界の定義より, X は互いに交わらない部分集合 A^i, A^e, ∂A の和集合となる. すなわち,

$$X = A^i \sqcup A^e \sqcup \partial A$$

と表すことができる. 特に, A^i および A^e が X の開集合であることより, ∂A は X の閉集合となる.

更に, 閉包, 触点, 集積点, 導集合, 孤立点を順に定義しよう. X を位相空間とし, $A \subset X$ とする. A を含む最小の閉集合を $\overline{A}$ と表し, A の閉包という. すなわち,

$$\overline{A} = \bigcap\{F \supset A | F \text{ は } X \text{ の閉集合}\}$$

である. $\overline{A}$ の点を A の触点という. 特に, A が X の閉集合であるための必要十分条件は $\overline{A} = A$ である.

X を全体集合とすると, $\overline{A}$ は A の補集合の内部の補集合あるいは A の外部の補集合, すなわち

$$\overline{A} = \left((A^c)^i\right)^c = (A^e)^c$$

である. 証明は距離空間の場合と同様である.

更に, $x \in X$ とする. x が $A \setminus \{x\}$ の触点, すなわち $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ のとき, x を A の集積点という. また, A の集積点全体の集合を A^d と表し, A の導集合という. 更に, $A \setminus A^d$ の点を A の孤立点という. このとき, 距離空間の場合と同様に,

$$\overline{A} = A \cup A^d$$

がなりたつ.

問題 8

1. $(X, \mathfrak{O}_X)$, $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ を位相空間とする．このとき, X と Y の直和 $X \sqcup Y$ の部分集合系 $\mathfrak{O}_{X \sqcup Y}$ を

$$\mathfrak{O}_{X \sqcup Y} = \{O_X \cup O_Y | O_X \in \mathfrak{O}_X,\ O_Y \in \mathfrak{O}_Y\}$$

により定める．$\mathfrak{O}_{X \sqcup Y}$ は $X \sqcup Y$ の位相であることを示せ．なお, $(X \sqcup Y, \mathfrak{O}_{X \sqcup Y})$ を $(X, \mathfrak{O}_X)$ と $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ の直和, $\mathfrak{O}_{X \sqcup Y}$ を直和位相という．同様に, 位相空間の族に対しても直和および直和位相を考えることができる．

2. X を空でない集合とし, X の部分集合系 $\mathfrak{O}$ を

$$\mathfrak{O} = \{O \subset X | X \setminus O \text{ は有限集合}\} \cup \{\emptyset\}$$

により定める．$\mathfrak{O}$ は X の位相であることを示せ．なお, この $\mathfrak{O}$ を余有限位相, 補有限位相, または有限補集合位相という．また, $X = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ のときは, この $\mathfrak{O}$ を Zariski 位相ともいう．

3. $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とし, $A \subset X$ とする．このとき, A の $\mathfrak{O}$ に関する相対位相 $\mathfrak{O}_A$ を考える．更に, $B \subset A$ とする．
(1) A が X の開集合で, B が A の開集合ならば, B は X の開集合であることを示せ．
(2) A が X の閉集合で, B が A の閉集合ならば, B は X の閉集合であることを示せ．

4. $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とし, $A \subset X$ とする．このとき, A の $\mathfrak{O}$ に関する相対位相 $\mathfrak{O}_A$ を考える．更に, $B \subset A$ とする．B の $\mathfrak{O}_A$ に関する相対位相は B の $\mathfrak{O}$ に関する相対位相に一致することを示せ．

問題 8 の解答

1. まず, $X \in \mathfrak{O}_X$, $Y \in \mathfrak{O}_Y$ だから,

$$\begin{aligned} X \sqcup Y &= X \cup Y \\ &\in \mathfrak{O}_{X \sqcup Y}. \end{aligned}$$

また, $\emptyset \in \mathfrak{O}_X$, $\emptyset \in \mathfrak{O}_Y$ だから,

$$\begin{aligned} \emptyset &= \emptyset \cup \emptyset \\ &\in \mathfrak{O}_{X \sqcup Y}. \end{aligned}$$

次に,

$$O_{X,1} \cup O_{Y,1}, O_{X,2} \cup O_{Y,2} \in \mathfrak{O}_{X \sqcup Y} \quad (O_{X,1}, O_{X,2} \in \mathfrak{O}_X,\ O_{Y,1}, O_{Y,2} \in \mathfrak{O}_Y)$$

とする. このとき,

$$O_{X,1} \cap O_{X,2} \in \mathfrak{O}_X, \quad O_{Y,1} \cap O_{Y,2} \in \mathfrak{O}_Y.$$

よって,

$$\begin{aligned} (O_{X,1} \cup O_{Y,1}) \cap (O_{X,2} \cup O_{Y,2}) &= (O_{X,1} \cap O_{X,2}) \cup (O_{Y,1} \cap O_{Y,2}) \\ &\in \mathfrak{O}_{X \sqcup Y}. \end{aligned}$$

更に, $\mathfrak{O}_{X \sqcup Y}$ の元からなる集合族を $(O_{X,\lambda} \cup O_{Y,\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ $(O_{X,\lambda} \in \mathfrak{O}_X,\ O_{Y,\lambda} \in \mathfrak{O}_Y)$ と表しておく. このとき, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_{X,\lambda} \in \mathfrak{O}_X$, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_{Y,\lambda} \in \mathfrak{O}_Y$. よって,

$$\begin{aligned} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (O_{X,\lambda} \cup O_{Y,\lambda}) &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_{X,\lambda} \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_{Y,\lambda} \\ &\in \mathfrak{O}_{X \sqcup Y}. \end{aligned}$$

したがって, $\mathfrak{O}_{X \sqcup Y}$ は $X \sqcup Y$ の位相である.

2. まず, $X \setminus X = \emptyset$ で, $\emptyset$ は有限集合だから, $X \in \mathfrak{O}$. また, $\mathfrak{O}$ の定義より, $\emptyset \in \mathfrak{O}$.

次に, $O_1, O_2 \in \mathfrak{O}$ とする. $O_1 = \emptyset$ または $O_2 = \emptyset$ のとき, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. よって, $\mathfrak{O}$ の定義より, $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$. $O_1 \neq \emptyset$ かつ $O_2 \neq \emptyset$ のとき, $\mathfrak{O}$ の定義より, $X \setminus O_1$, $X \setminus O_2$ は有限集合. 更に, de Morgan の法則より,

$$X \setminus (O_1 \cap O_2) = (X \setminus O_1) \cup (X \setminus O_2)$$

だから, $X \setminus (O_1 \cap O_2)$ は有限集合. よって, $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$.

更に, $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathfrak{O}$ の元からなる集合族とする. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, $O_\lambda = \emptyset$ のとき, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = \emptyset$. よって, $\mathfrak{O}$ の定義より, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$. ある $\lambda_0 \in \Lambda$ に対して, $O_{\lambda_0} \neq \emptyset$ のとき, de Morgan の法則より,

$$\begin{aligned} X \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \right) &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus O_\lambda) \\ &\subset X \setminus O_{\lambda_0}. \end{aligned}$$

ここで, $\mathfrak{O}$ の定義より, $X \setminus O_{\lambda_0}$ は有限集合だから, $X \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \right)$ は有限集合. よって, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$.

したがって, $\mathfrak{O}$ は X の位相である.

3. (1) B は A の開集合だから, $B = O \cap A$ となる $O \in \mathfrak{O}$ が存在する. 更に, A は X の開集合, すなわち $A \in \mathfrak{O}$. よって, $B \in \mathfrak{O}$, すなわち B は X の開集合.

(2) B は A の閉集合だから, $A \setminus B$ は A の開集合. よって, $A \setminus B = O \cap A$ となる $O \in \mathfrak{O}$ が存在する. 更に, $B \subset A$ だから, $(X \setminus A) \cap B = \emptyset$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} X \setminus B &= ((X \setminus A) \cup A) \setminus B \\ &= ((X \setminus A) \setminus B) \cup (A \setminus B) \\ &= (X \setminus A) \cup (A \setminus B) \\ &= (X \setminus A) \cup (O \cap A) \\ &= ((X \setminus A) \cup O) \cap ((X \setminus A) \cup A) \\ &= ((X \setminus A) \cup O) \cap X \\ &= (X \setminus A) \cup O. \end{aligned}$$

ここで, A は X の閉集合だから, $X \setminus A \in \mathfrak{O}$. また, $O \in \mathfrak{O}$. よって, $X \setminus B \in \mathfrak{O}$, すなわち, B は X の閉集合.

4. B の $\mathfrak{O}_A$, $\mathfrak{O}$ に関する相対位相をそれぞれ $\mathfrak{O}_{B \subset A}$, $\mathfrak{O}_{B \subset X}$ と表す.

まず, $O \in \mathfrak{O}_{B \subset A}$ とする. このとき, $O = O' \cap B$ となる $O' \in \mathfrak{O}_A$ が存在する. 更に, $O' = O'' \cap A$ となる $O'' \in \mathfrak{O}$ が存在する. これらと $B \subset A$ であることより,

$$\begin{aligned} O &= (O'' \cap A) \cap B \\ &= O'' \cap (A \cap B) \\ &= O'' \cap B. \end{aligned}$$

すなわち, $O = O'' \cap B$. よって, $O \in \mathfrak{O}_{B \subset X}$. したがって, $\mathfrak{O}_{B \subset A} \subset \mathfrak{O}_{B \subset X}$.

逆に, $O \in \mathfrak{O}_{B \subset X}$ とする. このとき, $O = O'' \cap B$ となる $O'' \in \mathfrak{O}$ が存在する. よって, $O \subset B \subset A$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} O &= O \cap A \\ &= (O'' \cap B) \cap A \\ &= (O'' \cap A) \cap B. \end{aligned}$$

すなわち,

$$O = (O'' \cap A) \cap B.$$

ここで, $O'' \cap A \in \mathfrak{O}_A$ だから, $O \in \mathfrak{O}_{B \subset A}$. したがって, $\mathfrak{O}_{B \subset X} \subset \mathfrak{O}_{B \subset A}$.

以上より, $\mathfrak{O}_{B \subset A} = \mathfrak{O}_{B \subset X}$. すなわち, B の $\mathfrak{O}_A$ に関する相対位相は B の $\mathfrak{O}$ に関する相対位相に一致する.