

§9. 位相空間の間の連続写像

距離空間の間の連続写像のみたす性質に注目し、位相空間の間の写像の連続性を定めることができる。

定義 X, Y を位相空間, f を X から Y への写像とする。

$a \in X$ とする. f による $f(a)$ を含む Y の任意の開集合の逆像が X の開集合となるとき, f は a で連続であるという。

f が任意の $a \in X$ で連続なとき, f は連続であるという。

特に, $\mathbf{R}$ や $\mathbf{C}$ への連続写像を連続関数ともいう。

注意 上の定義において, a における f の連続性に対する条件は, それと同値な「 f による $f(a)$ の任意の近傍の逆像が a の近傍となる」とすることもある。

距離空間の場合と同様に, 位相空間の間の写像の合成に関して, 次のとおり。

定理 X, Y, Z を位相空間, f を X から Y への写像, g を Y から Z への写像とする. f が a で連続で, g が $f(a)$ で連続ならば, 合成写像 $g \circ f$ は a で連続。

特に, f, g が連続ならば, $g \circ f$ は連続。

証明 O を $(g \circ f)(a)$ を含む Z の開集合とする. このとき,

$$(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O)).$$

ここで, g は $f(a)$ で連続で, O は $g(f(a))$ を含む Z の開集合だから, $g^{-1}(O)$ は $f(a)$ を含む Y の開集合. 更に, f は a で連続だから, $f^{-1}(g^{-1}(O))$ は X の開集合. よって, $(g \circ f)^{-1}(O)$ は X の開集合. したがって, $g \circ f$ は a で連続. $\square$

また, 次のについても距離空間の場合と同様である。

定理 X, Y を位相空間, f を X から Y への写像とする. このとき, 次の (1)~(4) は同値。

- (1) f は連続.
- (2) f による Y の任意の開集合の逆像は X の開集合.
- (3) f による Y の任意の閉集合の逆像は X の閉集合.
- (4) 任意の $A \subset X$ に対して, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

証明 問題7で詳しく述べなかった (4) $\Rightarrow$ (3) のみ示す。

F を Y の閉集合とし, $A = f^{-1}(F)$ とおく. 仮定より,

$$\begin{aligned} f(\overline{A}) &\subset \overline{f(A)} \\ &= \overline{f(f^{-1}(F))} \\ &\subset \overline{F} \\ &= F. \end{aligned}$$

すなわち, $f(\overline{A}) \subset F$. よって,

$$\begin{aligned} \overline{A} &\subset f^{-1}(f(\overline{A})) \\ &\subset f^{-1}(F) \\ &= A. \end{aligned}$$

すなわち, $\bar{A} \subset A$. 一方, $A \subset \bar{A}$ は常になりたつから, $\bar{A} = A$. すなわち, A は X の閉集合. したがって, f による Y の任意の閉集合の逆像は X の閉集合 $\square$

注意 上の定理より, 位相空間 X から位相空間 Y への写像 f の連続性に対する条件は, 最初の定義において述べたものの代わりに, 上の定理の条件の (2)~(4) のどれを用いてもよい.

連続写像の例を幾つか挙げよう.

例 $(X, \mathfrak{O}_X)$ を離散空間, $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ を位相空間, f を X から Y への写像とする. ここで, $O \in \mathfrak{O}_Y$ とすると, $f^{-1}(O)$ は X の部分集合だから, 離散位相の定義より, $f^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_X$. よって, 上の定理より, f は連続. すなわち, 離散空間から任意の位相空間への任意の写像は連続.

例 $(X, \mathfrak{O}_X)$ を位相空間, $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ を密着空間, f を X から Y への写像とする. まず, 密着位相の定義より, $\mathfrak{O}_Y = \{\emptyset, Y\}$. ここで,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \\ &\in \mathfrak{O}_X. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y) &= X \\ &\in \mathfrak{O}_X. \end{aligned}$$

よって, 上の定理より, f は連続. すなわち, 任意の位相空間から密着空間への任意の写像は連続.

例 (定値写像)

$(X, \mathfrak{O}_X), (Y, \mathfrak{O}_Y)$ を位相空間とし, $y_0 \in Y$ を固定しておく. このとき, X から Y への写像 f を

$$f(x) = y_0 \quad (x \in X)$$

により定める. この f を定値写像という.

ここで, $O \in \mathfrak{O}_Y$ とすると, $y_0 \in O$ のとき,

$$\begin{aligned} f^{-1}(O) &= X \\ &\in \mathfrak{O}_X. \end{aligned}$$

また, $y_0 \notin O$ のとき,

$$\begin{aligned} f^{-1}(O) &= \emptyset \\ &\in \mathfrak{O}_X. \end{aligned}$$

よって, 上の定理より, f は連続.

例 (恒等写像)

X を位相空間とする. X 上の恒等写像 1_X による X の任意の開集合 O の逆像は O 自身である. よって, 上の定理より, 1_X は連続.

注意 上の例において, 1_X の定義域と値域で異なる位相を考える場合は, 1_X は連続とは限らない.

例えば, X を 2 点以上を含む集合とし, 1_X の定義域については密着位相を考え, 値域については離散位相を考えると, 1_X は連続ではない. 実際, $p \in X$ とすると, $\{p\}$ は離散位相に関して X の開集合であるが, $1_X^{-1}(\{p\}) = \{p\}$ は密着位相に関して X の開集合でも閉集合でもない.

上の注意と関連して、距離空間の場合と同様に、位相空間に対しても次のように定める。

定義 X, Y を位相空間とする。

f を X から Y への写像とする。 f が全単射で、 f および f^{-1} が連続なとき、 f を同相写像という。

X から Y への同相写像が存在するとき、 X と Y は同相であるという。

上の定理より、直ちに次がなりたつ。

定理 X を空でない集合、 $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ を X の位相とする。このとき、次の (1), (2) は同値。

$$(1) \mathfrak{D} = \mathfrak{D}'.$$

$$(2) X \text{ 上の恒等写像 } 1_X \text{ は } (X, \mathfrak{D}) \text{ から } (X, \mathfrak{D}') \text{ への同相写像.}$$

部分空間への写像の連続性に関して、次がなりたつ。

定理 X, Y を位相空間、 B を Y の部分空間、 f を X から B への写像、 ι を B から Y への包含写像、すなわち

$$\iota(x) = x \quad (x \in B)$$

とする。このとき、 f が連続であることと $\iota \circ f$ が連続であることは同値。

証明 部分空間の定義より、 B の開集合は Y の開集合 O を用いて、 $O \cap B$ と表され、

$$\begin{aligned} (\iota \circ f)^{-1}(O) &= f^{-1}(\iota^{-1}(O)) \\ &= f^{-1}(O \cap B). \end{aligned}$$

すなわち、

$$(\iota \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(O \cap B).$$

よって、 $\iota \circ f$ による Y の開集合 O の逆像が X の開集合となることと f による B の開集合 $O \cap B$ の逆像が X の開集合となることは同値。したがって、上の定理より、 f が連続であることと $\iota \circ f$ が連続であることは同値。 $\square$

例 (包含写像)

上の定理において、 X も Y の部分空間 B とし、 f を B 上の恒等写像 1_B とする。このとき、上の例より、 1_B は連続だから、 $\iota \circ 1_B$ 、すなわち包含写像 ι は連続。

例 (制限写像)

X, Y を位相空間、 f を X から Y への連続写像、 A を X の部分空間とする。このとき、 f の A への制限 $f|_A$ 、すなわち

$$(f|_A)(x) = f(x) \quad (x \in A)$$

は連続である。実際、 $f|_A$ は A から X への包含写像 ι と f の合成写像 $f \circ \iota$ に一致し、 ι も f も連続だからである。

例 X, Y を位相空間、 B を Y の部分空間、 g を $g(X) \subset B$ となる X から Y への連続写像とする。このとき、上の定理において、 g の値域を B に制限した写像を f とすると、 $g = \iota \circ f$ である。よって、上の定理より、 f は連続。

問題 9

1. X を位相空間とし, X で定義された実数値連続関数全体の集合を $C(X)$ と表すことにする.
このとき, $f, g \in C(X)$, $c \in \mathbf{R}$ に対して, X で定義された実数値関数 $f+g$, cf , fg をそれぞれ

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x) \quad (x \in X)$$

により定める.

- (1) $f+g \in C(X)$ であることを示せ.
- (2) $cf \in C(X)$ であることを示せ.
- (3) $fg \in C(X)$ であることを示せ.

問題 9 の解答

1. (1) $a \in X$ とし, U を $(f+g)(a)$ の近傍とする. このとき, 近傍の定義より, ある $\varepsilon > 0$ が存在し,

$$B((f+g)(a); \varepsilon) \subset U.$$

更に,

$$O_1 = f^{-1} \left(B \left(f(a); \frac{\varepsilon}{2} \right) \right)$$

とおくと, f は a で連続だから, O_1 は a を含む X の開集合. また,

$$O_2 = g^{-1} \left(B \left(g(a); \frac{\varepsilon}{2} \right) \right)$$

とおくと, g は a で連続だから, O_2 は a を含む X の開集合.

ここで, $x \in O_1 \cap O_2$ とすると, 三角不等式より,

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(a)| &= |(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))| \\ &= |(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

すなわち,

$$x \in (f+g)^{-1}(B((f+g)(a); \varepsilon)).$$

よって,

$$\begin{aligned} O_1 \cap O_2 &\subset (f+g)^{-1}(B((f+g)(a); \varepsilon)) \\ &\subset (f+g)^{-1}(U). \end{aligned}$$

すなわち,

$$O_1 \cap O_2 \subset (f+g)^{-1}(U).$$

$O_1 \cap O_2$ は a を含む X の開集合だから, $(f+g)^{-1}(U)$ は a の近傍. したがって, $f+g$ は a で連続. a は任意だから, $f+g$ は連続, すなわち, $f+g \in C(X)$.

- (2) $a \in X$ とし, U を $(cf)(a)$ の近傍とする. このとき, 近傍の定義より, ある $\varepsilon > 0$ が存在し,

$$B((cf)(a); \varepsilon) \subset U.$$

更に,

$$O = f^{-1} \left(B \left(f(a); \frac{\varepsilon}{1+|c|} \right) \right)$$

とおくと, f は a で連続だから, O は a を含む X の開集合.

ここで, $x \in O$ とすると,

$$\begin{aligned} |(cf)(x) - (cf)(a)| &= |cf(x) - cf(a)| \\ &= |c||f(x) - f(a)| \\ &\leq |c| \frac{\varepsilon}{1+|c|} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

すなわち,

$$x \in (cf)^{-1}(B((cf)(a); \varepsilon)).$$

よって,

$$\begin{aligned} O &\subset (cf)^{-1}(B((cf)(a); \varepsilon)) \\ &\subset (cf)^{-1}(U). \end{aligned}$$

すなわち,

$$O \subset (cf)^{-1}(U).$$

O は a を含む X の開集合だから, $(cf)^{-1}(U)$ は a の近傍. したがって, cf は a で連続. a は任意だから, cf は連続, すなわち, $cf \in C(X)$.

(3) $a \in X$ とし, U を $(fg)(a)$ の近傍とする. このとき, 近傍の定義より, ある $\varepsilon > 0$ が存在し,

$$B((fg)(a); \varepsilon) \subset U.$$

更に,

$$O_1 = f^{-1} \left(B \left(f(a); \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{1 + |f(a)| + |g(a)|} \right\} \right) \right)$$

とおくと, f は a で連続だから, O_1 は a を含む X の開集合. また,

$$O_2 = g^{-1} \left(B \left(g(a); \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{1 + |f(a)| + |g(a)|} \right\} \right) \right)$$

とおくと, g は a で連続だから, O_2 は a を含む X の開集合.

ここで, $x \in O_1 \cap O_2$ とすると, 三角不等式より,

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(a)| &= |f(x)g(x) - f(a)g(a)| \\ &= |(f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))| \\ &\leq |f(x) - f(a)| |g(x) - g(a)| + |f(a)| |g(x) - g(a)| \\ &\leq |f(x) - f(a)| (|g(x) - g(a)| + |g(a)|) + |f(a)| |g(x) - g(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{1 + |f(a)| + |g(a)|} (1 + |g(a)|) + |f(a)| \frac{\varepsilon}{1 + |f(a)| + |g(a)|} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

すなわち,

$$x \in (fg)^{-1}(B((fg)(a); \varepsilon)).$$

よって,

$$\begin{aligned} O_1 \cap O_2 &\subset (fg)^{-1}(B((fg)(a); \varepsilon)) \\ &\subset (fg)^{-1}(U). \end{aligned}$$

すなわち,

$$O_1 \cap O_2 \subset (fg)^{-1}(U).$$

$O_1 \cap O_2$ は a を含む X の開集合だから, $(fg)^{-1}(U)$ は a の近傍. したがって, fg は a で連続. a は任意だから, fg は連続, すなわち, $fg \in C(X)$.