§10. 基本近傍系

位相空間の点列の収束や位相空間の間の写像の連続性などについて考察する場合, 考えるべき点における近傍がすべて必要とされる訳ではない. 例えば, 距離空間の場合は点 a における ε 近傍 $B(a;\varepsilon)$ が基本的役割を果たす. ここでは, 距離空間に対する 1 点における ε 近傍全体の集合の一般化である, 基本近傍系について述べよう.

定義 X を位相空間とし, $x \in X$ とする.

x の近傍全体の集合を $\mathfrak{U}(x)$ と表し, x の近傍系という.

$\mathfrak{U}^*(x) \subset \mathfrak{U}(x)$ とする. 任意の $U \in \mathfrak{U}(x)$ に対して, $U^* \subset U$ となる $U^* \in \mathfrak{U}^*(x)$ が存在するとき, $\mathfrak{U}^*(x)$ を x の基本近傍系という.

注意 上の定義において, 逆に基本近傍系 $\mathfrak{U}^*(x)$ があたえられているとき, $U \subset X$ に対して, $U^* \subset U$ となる $U^* \in \mathfrak{U}^*(x)$ が存在するならば, $U \in \mathfrak{U}(x)$ である. よって,

$$\mathfrak{U}(x) = \{U \subset X | U^* \subset U \text{ となる } U^* \in \mathfrak{U}^*(x) \text{ が存在する }\}$$

となり, 基本近傍系さえあたえられていれば, 近傍系を決定することができる.

基本近傍系の例を挙げよう.

例 X を位相空間とし, $x \in X$ とする. このとき, $\mathfrak{U}(x)$ はもちろん x の基本近傍系である.

例 X を距離空間とし, $a \in X$ とする. このとき,

$$\mathfrak{U}^*(a) = \{B(a;\varepsilon) | \varepsilon > 0\}$$

とおく. 距離空間の開集合および近傍の定義より, $\mathfrak{U}^*(a)$ は a の基本近傍系である.

例 X を位相空間とし, $x \in X$ とする. このとき, x の開近傍全体の集合を $\mathfrak{U}^*(x)$ とおく. 近傍および開近傍の定義より, $\mathfrak{U}^*(x)$ は x の基本近傍系である.

注意 上の例に対して, 閉近傍全体の集合は基本近傍系になることもあれば, ならないこともある.

例えば, 2 つめの例において,

$$\mathfrak{U}^{**}(a) = \left\{ \overline{B(a;\varepsilon)} \middle| \varepsilon > 0 \right\}$$

とおくと, $\mathfrak{U}^{**}(a)$ の x の基本近傍系となる.

一方, X を 2 点 p, q からなる集合とし,

$$\mathfrak{O} = \{\emptyset, \{p\}, X\}$$

とおく. すなわち, $(X, \mathfrak{O})$ は §8 において述べた Sierpinski 空間である. このとき,

$$\mathfrak{U}(p) = \{\{p\}, X\}$$

であるが, p の閉近傍全体の集合は $\{X\}$ となる. よって, $\{p\} \in \mathfrak{U}(p)$ に含まれる p の閉近傍は存在しない.

位相空間の間の写像の連続性は基本近傍系を用いても特徴付けることができる.

定理 X, Y を位相空間, f を X から Y への写像とする. 更に, $a \in X$ とし, $f(a)$ の基本近傍系 $\mathfrak{U}^*(f(a))$ があたえられているとする. このとき, 次の (1), (2) は同値.

(1) f は a で連続.
(2) 任意の $U^* \in \mathfrak{U}^*(f(a))$ に対して, $f^{-1}(U^*) \in \mathfrak{U}(a)$.

証明 (1) $\Rightarrow$ (2): $\mathfrak{U}^*(f(a)) \subset \mathfrak{U}(f(a))$ だから, $U^* \in \mathfrak{U}(f(a))$. よって, 仮定より, $f^{-1}(U^*) \in \mathfrak{U}(a)$.
(2) $\Rightarrow$ (1): $U \in \mathfrak{U}(f(a))$ とする. このとき, 基本近傍系の定義より, $U^* \subset U$ となる $U^* \in \mathfrak{U}^*(f(a))$ が存在する. よって,

$$f^{-1}(U^*) \subset f^{-1}(U).$$

ここで, 仮定より, $f^{-1}(U^*) \in \mathfrak{U}(a)$ だから, $f^{-1}(U) \in \mathfrak{U}(a)$. したがって, f は a で連続. □

次に, 位相空間の間の写像の連続性と点列の収束の関係について考えよう. まず, 距離空間の場合と同様に, 次がなりたつ.

定理 X, Y を位相空間, f を X から Y への写像とし, $a \in X$ とする. f が a で連続ならば, a に収束する X の任意の点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ に対して, Y の点列 $\{f(a_n)\}_{n=1}^\infty$ は $f(a)$ に収束する.

上の定理において, X, Y が距離空間の場合は逆もなりたったが, X, Y が一般の位相空間の場合は逆は必ずしもなりたつとは限らない. そこでまず, 次のように定めよう.

定義 X, Y を位相空間, f を X から Y への写像とし, $a \in X$ とする. a に収束する X の任意の点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ に対して, Y の点列 $\{f(a_n)\}_{n=1}^\infty$ が $f(a)$ に収束するとき, f は a で点列連続であるという.

例 X を非可算集合とし, X の部分集合系 $\mathfrak{O}$ を

$$\mathfrak{O} = \{O \subset X | X \setminus O \text{ は高々可算 }\} \cup \{\emptyset\}$$

により定める. このとき, $X \setminus X = \emptyset$ で, $\emptyset$ は高々可算だから, $X \in \mathfrak{O}$. また, $\emptyset \in \mathfrak{O}$. 次に, $O_1, O_2 \in \mathfrak{O}$ とする. $O_1 = \emptyset$ または $O_2 = \emptyset$ のとき, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. よって, $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$. $O_1 \neq \emptyset$ かつ $O_2 \neq \emptyset$ のとき, $X \setminus O_1$, $X \setminus O_2$ は高々可算. 更に,

$$X \setminus (O_1 \cap O_2) = (X \setminus O_1) \cup (X \setminus O_2)$$

だから, $X \setminus (O_1 \cap O_2)$ は高々可算. よって, $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$. 更に, $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathfrak{O}$ の元からなる集合族とする. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, $O_\lambda = \emptyset$ のとき, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = \emptyset$. よって, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$. ある $\lambda_0 \in \Lambda$ に対して, $O_{\lambda_0} \neq \emptyset$ のとき,

$$\begin{aligned} X \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \right) &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus O_\lambda) \\ &\subset X \setminus O_{\lambda_0}. \end{aligned}$$

ここで, $X \setminus O_{\lambda_0}$ は高々可算だから, $X \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \right)$ は高々可算. よって, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$. したがって, $\mathfrak{O}$ は X の位相である. $\mathfrak{O}$ を余可算位相, 補可算位相, または可算補集合位相という. 問題 8 も参考にするとよい.

次に, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ を $\mathfrak{O}$ に関して $a \in X$ に収束する X の点列とする. $A \subset X$ を

$$A = \{a_n | n \in \mathbf{N},\ a_n \neq a\}$$

により定める. このとき, $a \notin A$ で, A は高々可算. よって, $a \in X \setminus A \in \mathfrak{O}$. 更に, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathfrak{O}$ に関して a に収束するから, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば, $a_n \in X \setminus A$. したがって, A の定義より, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば, $a_n = a$.

ここで, X の離散位相, すなわち 2^X を考える. 上で述べたことより, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathfrak{O}$ に関して $a \in X$ に収束するならば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 2^X に関しても a に収束する. よって, $(X, \mathfrak{O})$ から $(X, 2^X)$ への恒等写像 1_X は a で点列連続である.

一方, X は非可算集合だから, X の 1 点からなる集合は $\mathfrak{O}$ に関する X の開集合ではない. よって, 上の 1_X は連続ではない.

さて, 距離空間に対しては, 各点において可算基本近傍系, すなわち可算個の元からなる基本近傍系を選ぶことができる. 実際, X を距離空間とし, $a \in X$ とするとき,

$$\mathfrak{U}^*(a) = \left\{ B\left(a; \frac{1}{n}\right) \middle| n \in \mathbf{N} \right\} \tag{$*$}$$

とおくと, $\mathfrak{U}^*(a)$ は a の可算基本近傍系である. また, $\mathfrak{U}^*(a)$ の元は n が増えていくにつれて包含関係に関して小さくなっていくことにも注意しておこう.

実は, この事実は距離空間の間の写像に対する連続性と点列連続性の同値性と深く関わることである. そこで, 一般の位相空間に対して, 次のように定める.

定義 X を位相空間とする. X の任意の点が可算基本近傍系をもつとき, X は第一可算公理をみたすという.

例 上で述べたことより, 距離空間は第一可算公理をみたす.

第一可算公理をみたす位相空間に対しては, $(*)$ のような可算基本近傍系を選ぶことができる.

定理 X を第一可算公理をみたす位相空間とする. このとき, 任意の $x \in X$ に対して, x の可算基本近傍系 $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ で,

$$U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_n \supset \cdots$$

となるものが存在する.

証明 仮定より, x の可算基本近傍系 $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ が存在する. よって,

$$U_n = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \quad (n \in \mathbf{N})$$

とおけばよい. □

それでは, 上の定理を用いて, 次を示そう.

定理 X を第一可算公理をみたす位相空間, Y を位相空間, f を X から Y への写像とし, $a \in X$ とする. f が a で点列連続ならば, f は a で連続.

証明 背理法により示す.

f が a で連続でないと仮定する. X は第一可算公理をみたすから, 上の定理より, a の可算基本近傍系 $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ で,

$$U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_n \supset \cdots$$

となるものが存在する.

仮定より, $f(a)$ のある近傍 V で, $f^{-1}(V)$ が a の近傍とならないものが存在する. このとき, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して, $U_n \not\subset f^{-1}(V)$. よって, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, $a_n \in U_n$ となる $a_n \in X$ で, $f(a_n) \notin V$ となるものが存在する. $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ の性質より, X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束するが, Y の点列 $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(a)$ に収束しない. これは矛盾. したがって, f は a で連続. □

問題 10

1. X を空でない集合とする.

(1) 各 $x \in X$ に対して, X の空でない部分集合系 $\mathfrak{U}(x)$ があたえられているとする. このとき, 次の (i)〜(iv) の条件を考える.

(i) 任意の $U \in \mathfrak{U}(x)$ に対して, $x \in U$.

(ii) $U, V \in \mathfrak{U}(x)$ ならば, $U \cap V \in \mathfrak{U}(x)$.

(iii) $U \in \mathfrak{U}(x)$, $U \subset V \subset X$ ならば, $V \in \mathfrak{U}(x)$.

(iv) 任意の $U \in \mathfrak{U}(x)$ に対して, ある $V \in \mathfrak{U}(x)$ が存在し,
任意の $y \in V$ に対して, $U \in \mathfrak{U}(y)$.

$\mathfrak{O}$ を X の位相とし, $x \in X$ に対して, $\mathfrak{U}(x)$ を $\mathfrak{O}$ に関する x の近傍系とする. このとき, 上の (i)〜(iv) がなりたつことを示せ.

なお, 上の (i)〜(iv) の条件を近傍系の公理という. また, 各 $x \in X$ に対して, 近傍系の公理をみたす $\mathfrak{U}(x)$ があたえられているとき, 逆に, $\mathfrak{U}(x)$ を x の近傍系とする X の位相が一意的に定まることが分かる.

(2) 各 $x \in X$ に対して, X の空でない部分集合系 $\mathfrak{U}^*(x)$ があたえられているとする. このとき, 次の (i)'〜(iii)' の条件を考える.

(i)' 任意の $U^* \in \mathfrak{U}^*(x)$ に対して, $x \in U^*$.

(ii)' $U^*, V^* \in \mathfrak{U}^*(x)$ ならば, $W^* \subset U^* \cap V^*$ となる $W^* \in \mathfrak{U}^*(x)$ が存在する.

(iii)' $U^* \in \mathfrak{U}^*(x)$ ならば, ある $V^* \in \mathfrak{U}^*(x)$ が存在し, 任意の $y \in V^*$ に対して,
$W^* \subset U^*$ となる $W^* \in \mathfrak{U}^*(y)$ が存在する.

$\mathfrak{O}$ を X の位相とし, $x \in X$ に対して, $\mathfrak{U}^*(x)$ を $\mathfrak{O}$ に関する x の基本近傍系とする. このとき, 上の (i)'〜(iii)' がなりたつことを示せ.

なお, 上の (i)'〜(iii)' の条件を基本近傍系の公理という.

(3) 各 $x \in X$ に対して, X の空でない部分集合系 $\mathfrak{U}^*(x)$ があたえられ, (2) の (i)'〜(iii)' の条件がなりたつとする. X の空でない部分集合系 $\mathfrak{U}(x)$ を

$$\mathfrak{U}(x) = \{U \subset X | U^* \subset U \text{ となる } U^* \in \mathfrak{U}^*(x) \text{ が存在する }\}$$

により定めると, (1) の (i)〜(iv) がなりたつことを示せ.

2. X を位相空間とする.

(1) O が X の開集合ならば, 点列の収束の定義より, 任意の $a \in O$ および a に収束する X の任意の点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ に対して, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば, $a_n \in O$ となる.

X が第一可算公理をみたすならば, 上の逆がなりたつことを示せ.

(2) A が X の閉集合ならば, $a \in X$ に収束する A の任意の点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ に対して, $a \in A$ となることを示せ.

(3) X が第一可算公理をみたすならば, (2) の逆がなりたつことを示せ.

問題 10 の解答

1. (1) まず, $U \in \mathfrak{U}(x)$ とする. このとき, 近傍の定義より, $x \in O \subset U$ となる $O \in \mathfrak{O}$ が存在する. よって, $x \in U$ となり, (i) がなりたつ.

次に, $U, V \in \mathfrak{U}(x)$ とする. このとき, 近傍の定義より, $x \in O_1 \subset U$ となる $O_1 \in \mathfrak{O}$ が存在し, $x \in O_2 \subset U$ となる $O_2 \in \mathfrak{O}$ が存在する. よって, $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$ で,

$$x \in O_1 \cap O_2 \subset U \cap V.$$

したがって, $U \cap V$ は x の近傍, すなわち $U \cap V \in \mathfrak{U}(x)$ となり, (ii) がなりたつ.

更に, $U \in \mathfrak{U}(x)$, $U \subset V \subset X$ とする. まず, $U \in \mathfrak{U}(x)$ より, $x \in O \subset U$ となる $O \in \mathfrak{O}$ が存在する. よって, $U \subset V$ より, $x \in O \subset V$. したがって, $V \in \mathfrak{U}(x)$ となり, (iii) がなりたつ.

最後に, $U \in \mathfrak{U}(x)$ とする. このとき, $x \in O \subset U$ となる $O \in \mathfrak{O}$ が存在する. x を含む X の開集合は x の近傍だから, $O \in \mathfrak{U}(x)$. 同様に, $y \in O$ とすると, $O \in \mathfrak{U}(y)$. よって, $V = O$ とおくと, (iv) がなりたつ.

以上より, (i)〜(iv) がなりたつ.

(2) まず, $U^* \in \mathfrak{U}^*(x)$ とする. このとき, $\mathfrak{U}^*(x) \subset \mathfrak{U}(x)$ だから, $U^* \in \mathfrak{U}(x)$. よって, (1) の (i) より, $x \in U$ となり, (i)' がなりたつ.

次に, $U^*, V^* \in \mathfrak{U}^*(x)$ とする. このとき, $U^*, V^* \in \mathfrak{U}(x)$. よって, (1) の (ii) より, $U^* \cap V^* \in \mathfrak{U}(x)$. したがって, 基本近傍系の定義より, $W^* \subset U^* \cap V^*$ となる $W^* \in \mathfrak{U}^*(x)$ が存在し, (ii)' がなりたつ.

更に, $U^* \in \mathfrak{U}^*(x)$ とする. このとき, $U^* \in \mathfrak{U}(x)$ だから, $x \in O \subset U^*$ となる $O \in \mathfrak{O}$ が存在する. よって, $O \in \mathfrak{U}(x)$ であることと基本近傍系の定義より, $V^* \subset O$ となる $V^* \in \mathfrak{U}^*(x)$ が存在する. ここで, $y \in V^*$ とすると, $y \in O$ だから, $O \in \mathfrak{U}(y)$. したがって, 基本近傍系の定義より, $W^* \subset O$ となる $W^* \in \mathfrak{U}^*(y)$ が存在する. このとき, $W^* \subset U^*$ となるから, (iii)' がなりたつ.

以上より, (i)'〜(iii)' がなりたつ.

(3) まず, $U \in \mathfrak{U}(x)$ とする. このとき, $\mathfrak{U}(x)$ の定義より, $U^* \subset U$ となる $U^* \in \mathfrak{U}^*(x)$ が存在する. よって, (2) の (i)' より, $x \in U^*$. したがって, $x \in U$ となり, (1) の (i) がなりたつ.

次に, $U, V \in \mathfrak{U}(x)$ とする. このとき, $U^* \subset U$ となる $U^* \in \mathfrak{U}^*(x)$ が存在し, $V^* \subset V$ となる $V^* \in \mathfrak{U}^*(x)$ が存在する. よって, (2) の (ii)' より, $W^* \subset U^* \cap V^*$ となる $W^* \in \mathfrak{U}^*(x)$ が存在する. このとき, $W^* \subset U \cap V$ となるから, $U \cap V \in \mathfrak{U}(x)$ となり, (1) の (ii) がなりたつ.

更に, $U \in \mathfrak{U}(x)$, $U \subset V \subset X$ とする. まず, $U \in \mathfrak{U}(x)$ より, $U^* \subset U$ となる $U^* \in \mathfrak{U}^*(x)$ が存在する. このとき, $U^* \subset V$. よって, $V \in \mathfrak{U}(x)$ となり, (1) の (iii) がなりたつ.

最後に, $U \in \mathfrak{U}(x)$ とする. このとき, $U^* \subset U$ となる $U^* \in \mathfrak{U}^*(x)$ が存在する. 更に, (2) の (iii)' より, ある $V^* \in \mathfrak{U}^*(x)$ が存在し, 任意の $y \in V^*$ に対して, $W^* \subset U^*$ となる $W^* \in \mathfrak{U}^*(y)$ が存在する. ここで, $V^* \subset V^*$ より, $V^* \in \mathfrak{U}(x)$. また, $W^* \subset U$. よって, $V = V^*$ とおくと, (1) の (iv) がなりたつ.

以上より, (1) の (i)〜(iv) がなりたつ.

2. (1) 対偶を示す.

O が X の開集合ではないと仮定する. このとき, ある $a \in O$ が存在し, a の任意の近傍 U に対して, $U \not\subset O$. ここで, X は第一可算公理をみたすから, a の可算基本近傍系 $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ で,

$$U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_n \supset \cdots$$

となるものが存在する．よって，各 $n \in \mathbf{N}$ に対して，$a_n \in U_n$ を $a_n \notin O$ となるように選ぶことができる．$(U_n)_{n=1}^{\infty}$ の性質より，X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束するが，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，$a_n \notin O$.

(2) 背理法により示す．

$a \notin A$ であると仮定する．このとき，$a \in X \setminus A$. A は X の閉集合だから，$X \setminus A$ は X の開集合．よって，ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し，$n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば，$a_n \in X \setminus A$. これは $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が A の点列であることに矛盾する．したがって，$a \in A$.

(3) 対偶を示す．

A が X の閉集合ではないと仮定する．このとき，$X \setminus A$ は X の開集合ではない．X は第一可算公理をみたすから，(1) より，ある $a \in X \setminus A$ および a に収束する X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在し，任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して，$n_k \geq k$ となる $n_k \in \mathbf{N}$ で，$a_{n_k} \notin X \setminus A$, すなわち $a_{n_k} \in A$ となるものが存在する．更に，n_k を $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列，すなわち

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

となるように選んでおくと，$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は $a \in X \setminus A$ に収束する．