§11. 位相の生成

§8 において定義したように, 部分集合系が位相となるためには, 3 つの条件をみたさなければならない. しかし, あたえられた部分集合系を含むような位相を考えることはできる. 例えば, 離散空間は任意の部分集合を含むため, そのような例となるが, ここでは逆に, できるだけ小さい位相について考えよう.

まず, 2 つの位相を比較する言葉をきちんと定めておこう.

定義　X を空でない集合, $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_2$ を X の位相とする. $\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{O}_2$ のとき, $\mathfrak{O}_1$ は $\mathfrak{O}_2$ より小さい, 弱い, または粗いという. また, $\mathfrak{O}_2$ は $\mathfrak{O}_1$ より大きい, 強い, または細かいという.

例　X を位相空間とする. このとき, X の密着位相は X のどの位相よりも小さい.

一方, X の離散位相は X のどの位相よりも大きい.

定理　X を空でない集合, $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_2$ を X の位相とする. このとき, 次の (1), (2) は同値.

(1) $\mathfrak{O}_1$ は $\mathfrak{O}_2$ より小さい.

(2) 恒等写像 $1_X : (X, \mathfrak{O}_2) \to (X, \mathfrak{O}_1)$ は連続.

証明　連続写像は開集合の逆像が常に開集合であることより, 明らか. □

さて, X を空でない集合, $\mathfrak{M}$ を X の部分集合系とする. このとき, $\mathfrak{M}$ を含む X の位相全体の中で最も小さいものを $\mathfrak{O}(\mathfrak{M})$ と表し, $\mathfrak{M}$ により生成される位相という. また, $\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{O}(\mathfrak{M})$ の準基底, 部分基底, または準開基という.

$\mathfrak{O}(\mathfrak{M})$ に関して, まず, 次がなりたつことが容易に分かる.

定理　$\mathfrak{O}(\mathfrak{M}) = \bigcap\{\mathfrak{O} | \mathfrak{M} \subset \mathfrak{O},\ \mathfrak{O}$ は X の位相 $\}$.

証明　まず, 右辺が $\mathfrak{M}$ を含むことは明らか.

次に, 右辺が位相の条件をみたすことを示せばよい. □

以下では, 上の $\mathfrak{O}(\mathfrak{M})$ をより具体的に表すことを考えていこう.

まず, 開集合と開集合の共通部分は開集合であることに注目し, $\mathfrak{M}$ の有限個の元 $O_1, O_2, \ldots, O_n$ を用いて,

$$O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n$$

と表されるもの全体の集合を $\mathfrak{M}_0$ と表す. 特に, $n = 1$ のときを考えると, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_0$ である. また, $n = 0$ のときも考え, $\mathfrak{M}$ の 0 個の元の共通部分は X であると約束する. よって, $X \in \mathfrak{M}_0$ である.

次に, 開集合の族の和集合は開集合であることに注目し, $\mathfrak{M}_0$ の元からなる集合族 $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を用いて, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ と表されるもの全体の集合を $\widetilde{\mathfrak{M}}$ と表す. 特に, Λ が 1 個の元からなるときを考えると, $\mathfrak{M}_0 \subset \widetilde{\mathfrak{M}}$ である. また, $\Lambda = \emptyset$ のときも考え, $\mathfrak{M}_0$ の 0 個の元の和集合は $\emptyset$ であると約束する. よって, $\emptyset \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ である.

実は, このようにして得られた $\widetilde{\mathfrak{M}}$ は $\mathfrak{O}(\mathfrak{M})$ に一致する. すなわち, 次がなりたつ.

定理　$\mathfrak{O}(\mathfrak{M}) = \widetilde{\mathfrak{M}}$.

証明　まず, $X \in \mathfrak{M}_0$ および $\mathfrak{M}_0 \subset \widetilde{\mathfrak{M}}$ より, $X \in \widetilde{\mathfrak{M}}$. また, $\emptyset \in \widetilde{\mathfrak{M}}$.

次に,

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda, \bigcup_{\mu\in M} O'_\mu \in \widetilde{\mathfrak{M}} \quad (O_\lambda, O'_\mu \in \mathfrak{M}_0)$$

とすると,

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \cap \bigcup_{\mu\in M} O'_\mu = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} (O_\lambda \cap O'_\mu).$$

$O_\lambda, O'_\mu \in \mathfrak{M}_0$ であることと $\mathfrak{M}_0$ の定義より, $O_\lambda \cap O'_\mu \in \mathfrak{M}_0$. よって,

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \cap \bigcup_{\mu\in M} O'_\mu \in \widetilde{\mathfrak{M}}.$$

更に, $\widetilde{\mathfrak{M}}$ の定義より, $\widetilde{\mathfrak{M}}$ の元からなる集合族の和集合は $\widetilde{\mathfrak{M}}$ の元である.

したがって, $\widetilde{\mathfrak{M}}$ は X の位相である. また, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_0$ および $\mathfrak{M}_0 \subset \widetilde{\mathfrak{M}}$ より, $\mathfrak{M} \subset \widetilde{\mathfrak{M}}$.

ここで, $\mathfrak{O}$ を $\mathfrak{M}$ を含む X の任意の位相とする. このとき, 位相の定義より, $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{O}$ となり, 更に, $\widetilde{\mathfrak{M}} \subset \mathfrak{O}$. すなわち, $\widetilde{\mathfrak{M}}$ は $\mathfrak{O}$ より小さいから, $\mathfrak{O}(\mathfrak{M}) = \widetilde{\mathfrak{M}}$. □

上で述べたことを基に, 次のように定める.

定義 $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間, $\mathfrak{B}$ を X の部分集合系とする. 任意の $O \in \mathfrak{O}$ が $\mathfrak{B}$ の元からなる部分集合族 $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を用いて, $O = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ と表されるとき, $\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{O}$ の基底または開基という.

注意 $\mathfrak{B}$ を位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ の基底とする. このとき, $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ となるから, $\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{O}$ の準基底でもある.

例 上において述べたことより, $\mathfrak{M}_0$ は $\mathfrak{O}(\mathfrak{M})$ の基底である.

例 (X, d) を距離空間とする. このとき, X の部分集合系 $\mathfrak{B}$ を

$$\mathfrak{B} = \{B(x;\varepsilon) | x \in X,\ \varepsilon > 0\}$$

により定める. 距離空間の開集合の定義より, $\mathfrak{B}$ は d により定まる位相の基底となる.

例 Euclid 距離から定まる $\mathbf{R}$ の位相を $\mathfrak{O}$ とする. 上の例より, 開区間全体の集合は $\mathfrak{O}$ の基底である.

これに対して, 問題 2 で扱った無限開区間を考え, これら全体の集合を $\mathfrak{M}$ としよう. このとき, $\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{O}$ の基底ではない. しかし, 任意の開区間は 2 つの無限開区間の共通部分として表すことができる. よって, $\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{O}$ の準基底である.

部分集合系がある位相の基底となるための必要十分条件は次のように述べることができる.

定理 X を空でない集合, $\mathfrak{B}$ を X の部分集合系とする. $\mathfrak{B}$ が X のある位相の基底となるための必要十分条件は次の (1), (2) がなりたつことである.

(1) 任意の $x \in X$ に対して, $x \in O$ となる $O \in \mathfrak{B}$ が存在する.

(2) $O_1, O_2 \in \mathfrak{B}$, $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ ならば, 任意の $x \in O_1 \cap O_2$ に対して, $x \in O \subset O_1 \cap O_2$ となる $O \in \mathfrak{B}$ が存在する.

証明 位相やその基底の定義を用いて, 条件を確かめればよい. □

さて, §10 において, 任意の点が可算基本近傍系をもつという第一可算公理について述べたが, ここでは, 第二可算公理について述べよう.

定義 $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とする. 高々可算個の元からなる $\mathfrak{O}$ の基底が存在するとき, X は第二可算公理をみたすという.

第二可算公理をみたす位相空間の例を挙げるために, 幾つか言葉を用意しておこう.

定義　X を位相空間とする.
$A \subset X$ とする. $\overline{A} = X$ となるとき, A は X において稠密であるという.
X が稠密で高々可算な部分集合をもつとき, X は可分であるという.

例　有理数全体の集合を $\mathbf{Q}$ と表す. このとき, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ である.
まず, $\mathbf{Q}$ が $\mathbf{R}$ において稠密であることを背理法により示す. $\mathbf{Q}$ が $\mathbf{R}$ において稠密でないと仮定する. このとき, $\overline{Q} \subsetneq \mathbf{R}$ だから, 閉包の定義より, $x \in (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})^i$ が存在する. 更に, $(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})^i$ は $\mathbf{R}$ の開集合だから, ある開区間 (a, b) が存在し,

$$x \in (a, b) \subset (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})^i.$$

ここで, 微分積分において学ぶように, 任意の開区間はある有理数を含む. これは矛盾. よって, $\mathbf{Q}$ は $\mathbf{R}$ において稠密である.
また, 集合論において学ぶように, $\mathbf{Q}$ は可算である. したがって, $\mathbf{Q}$ は $\mathbf{R}$ の稠密な可算部分集合である. すなわち, $\mathbf{R}$ は可分である.
さらに, 距離空間 $\mathbf{R}$ の n 個の直積として得られる $\mathbf{R}^n$ も可分である. 実際, $\mathbf{Q}$ の n 個の直積 $\mathbf{Q}^n$ が $\mathbf{R}^n$ の稠密な可算部分集合となる.

$\mathbf{R}^n$ は第二可算公理をみたす. より一般に, 次の定理として述べよう.

定理　可分な距離空間は第二可算公理をみたす.

証明　(X, d) を可分な距離空間とする.
まず, X は可分だから, 稠密で高々可算な X の部分集合 A が存在する. このとき,

$$\mathfrak{B} = \{B(x; \varepsilon) | x \in A,\ \varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbf{Q}\}$$

とおく. A は高々可算で, $\mathbf{Q}$ は可算だから, $\mathfrak{B}$ は高々可算である.
次に, $\mathfrak{B}$ が X の位相の基底となることを示す. O を X の開集合とし, $x \in O$ とする. このとき, ある $\varepsilon > 0$ が存在し, $B(x; \varepsilon) \subset O$. ここで, $B\left(x; \frac{\varepsilon}{3}\right) \cap A = \emptyset$ であると仮定すると, $B\left(x; \frac{\varepsilon}{3}\right) \subset (X \setminus A)^i$ となり, A が X において稠密であることに矛盾. よって, $y \in B\left(x; \frac{\varepsilon}{3}\right) \cap A$ が存在する. $r \in \mathbf{Q}$ を $\frac{1}{3}\varepsilon < r < \frac{2}{3}\varepsilon$ となるように選んでおくと,

$$\begin{aligned} d(x, y) &< \frac{1}{3}\varepsilon \\ &< r \end{aligned}$$

だから, $x \in B(y; r)$. また, $z \in B(y; r)$ とすると, 三角不等式より,

$$\begin{aligned} d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \\ &< \frac{1}{3}\varepsilon + r \\ &< \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

だから, $B(y; r) \subset B(x; \varepsilon)$. したがって, $x \in B(y; r) \subset O$ となるから, O はこのような $B(y; r)$ の和集合として表すことができる. $B(y; r) \in \mathfrak{B}$ だから, $\mathfrak{B}$ は O の基底である. □

問題 11

1. $(X, \mathfrak{O}_X)$, $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ を位相空間, f を X から Y への写像, $\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{O}_Y$ の準基底とする. f が連続であることと任意の $O \in \mathfrak{M}$ に対して, $f^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_X$ となることは同値であることを示せ.

2. $\mathfrak{B}_u$ を問題 3 において扱った左半開区間全体の集合とする.

(1) $\mathfrak{B}_u$ は $\mathbf{R}$ のある位相の基底となることを示せ.

(2) (1) により定まる $\mathbf{R}$ の位相を $\mathfrak{O}_u$ と表し, 上限位相という. 左半開区間は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_u)$ の開集合でも閉集合でもあることを示せ.

(3) 開区間は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_u)$ の開集合であることを示せ.

(4) $\mathfrak{B}_l$ を問題 3 において扱った右半開区間全体の集合とすると, (1) と同様に, $\mathfrak{B}_l$ は $\mathbf{R}$ のある位相の基底となる. $\mathfrak{O}_l$ を $\mathfrak{B}_l$ を基底とする $\mathbf{R}$ の位相とすると, (2), (3) と同様に, 右半開区間は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ の開集合でも閉集合でもあり, 開区間は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ の開集合である. なお, $\mathfrak{O}_l$ を下限位相, $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ を Sorgenfrey 直線という.

$\mathfrak{O}_u$ および $\mathfrak{O}_l$ より大きい $\mathbf{R}$ の位相は離散位相であることを示せ.

(5) $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_u)$ は第一可算公理をみたすことを示せ. 同様に, $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ は第一可算公理をみたす

(6) $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_u)$ は可分であることを示せ. 同様に, $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ は可分である.

(7) $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_u)$ は第二可算公理をみたさないことを示せ. 特に, $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_u)$ は距離付け可能ではない. 同様に, $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ は第二可算公理をみたさず, 距離付け可能ではない.

3. 第二可算公理をみたす距離空間は第一可算公理をみたし, 可分であることを示せ.

問題 11 の解答

1. まず, f が連続であると仮定する. このとき, f による Y の任意の開集合の逆像は X の開集合. 特に, $O \in \mathfrak{M}$ とすると, O は Y の開集合だから, $f^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_X$.

逆に, 任意の $O \in \mathfrak{M}$ に対して, $f^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_X$ となると仮定する.

まず,

$$\mathfrak{O} = \{A \subset Y | f^{-1}(A) \in \mathfrak{O}_X\}$$

とおき, $\mathfrak{O}$ が Y の位相となることを示す. $f^{-1}(Y) = X$ および $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ より, $Y, \emptyset \in \mathfrak{O}$. また, $A_1, A_2 \in \mathfrak{O}$ とすると, $f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2) \in \mathfrak{O}_X$ だから,

$$\begin{aligned} f^{-1}(A_1 \cap A_2) &= f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) \\ &\in \mathfrak{O}_X. \end{aligned}$$

すなわち, $A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{O}$. 更に, $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathfrak{O}$ の元からなる集合族とすると, $f^{-1}(A_\lambda) \in \mathfrak{O}_X$ だから,

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda) \\ &\in \mathfrak{O}_X. \end{aligned}$$

よって, $\mathfrak{O}$ は Y の位相である.

ここで, 仮定より, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{O}$. よって,

$$\begin{aligned} \mathfrak{O}_Y &= \mathfrak{O}(\mathfrak{M}) \\ &\subset \mathfrak{O}. \end{aligned}$$

すなわち, $\mathfrak{O}_Y \subset \mathfrak{O}$. したがって, f による $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ の任意の開集合の逆像は X の開集合. すなわち, f は連続である.

2. (1) まず, 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して, x を含む左半開区間が存在する.

また, 2 つの左半開区間の共通部分は空でないならば, 左半開区間である.

よって, $\mathfrak{B}_u$ は $\mathbf{R}$ のある位相の基底となる.

(2) 左半開区間を $(a, b]$ と表しておく. ただし, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ である.

まず, 基底の定義より, $(a, b]$ は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_u)$ の開集合.

次に, $n \in \mathbf{N}$ とすると, 左半開区間 $(a - n, a]$ および $(b, b + n]$ は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_u)$ の開集合.

ここで,

$$(-\infty, a] \cup (b, +\infty) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a - n, a]\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (b, b + n]\right).$$

よって, 基底の定義より, $(-\infty, a] \cup (b, +\infty)$ は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_u)$ の開集合. 更に,

$$(a, b] = \mathbf{R} \setminus ((-\infty, a] \cup (b, +\infty)).$$

したがって, $(a, b]$ は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_u)$ の閉集合.

以上より, 左半開区間は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_u)$ の開集合でも閉集合でもある.

(3) $n \in \mathbf{N}$ とすると, 左半開区間 $\left(a, b - \dfrac{b - a}{2n}\right]$ は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_u)$ の開集合. ここで,

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a, b - \frac{b - a}{2n}\right].$$

よって, (a,b) は $(\mathbf{R},\mathfrak{O}_u)$ の開集合. すなわち, 開区間は $(\mathbf{R},\mathfrak{O}_u)$ の開集合

(4) $a,b,c\in\mathbf{R}$, $a<b<c$ とする.

(2) より, $(a,b]\in\mathfrak{O}_u$ だから, 仮定より, $(a,b]\in\mathfrak{O}$.

同様に, $[b,c)\in\mathfrak{O}_l$ だから, 仮定より, $[b,c)\in\mathfrak{O}$.

よって,

$$\{b\}=(a,b]\cap[b,c)\in\mathfrak{O}.$$

したがって, $\mathfrak{O}$ は離散位相.

(5) $x\in\mathbf{R}$ に対して,

$$\mathfrak{U}^*(x)=\left\{\left(x-\frac{1}{n},x\right]\middle|\, n\in\mathbf{N}\right\}$$

とおく. このとき, $\mathfrak{U}^*(x)$ は可算.

また, $\mathfrak{B}_u$ は $\mathfrak{O}_u$ の基底だから, x を含む $(\mathbf{R},\mathfrak{O}_u)$ の開集合は $\mathfrak{U}^*(x)$ のある元を含む. よって, $\mathfrak{U}^*(x)$ は x の基本近傍系である.

したがって, $(\mathbf{R},\mathfrak{O}_u)$ は第一可算公理をみたす.

(6) $\mathfrak{O}_u$ に関して $(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q})^i\neq\emptyset$ であると仮定する. このとき, $\mathfrak{B}_u$ は $\mathfrak{O}_u$ の基底だから, $(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q})^i$ はある左半開区間を含む. 左半開区間はある有理数を必ず含むから, これは矛盾. よって, $\mathbf{Q}$ は $(\mathbf{R},\mathfrak{O}_u)$ において稠密. したがって, $(\mathbf{R},\mathfrak{O}_u)$ は可分.

(7) 背理法により示す.

$(X,\mathfrak{O}_u)$ が第二可算公理をみたすと仮定する. このとき, 高々可算個の元からなる $\mathfrak{O}_u$ の基底 $\mathfrak{B}$ が存在する. ここで, $A\subset\mathbf{R}$ を

$$A=\{x\in\mathbf{R}|\ \text{ある}\ O\in\mathfrak{B}\ \text{に対して},\ x=\max O\}$$

により定める. このとき, $\mathfrak{B}$ は高々可算だから, A は高々可算.

また, $B\subset\mathbf{R}$ を

$$B=\{x\in\mathbf{R}|\ \text{ある}\ O\in\mathfrak{O}_u\ \text{に対して},\ x=\max O\}$$

により定める.

このとき, 基底の定義より, $A=B$. 一方, 任意の左半開区間は $\mathfrak{O}_u$ の元だから, $B=\mathbf{R}$. よって, $\mathbf{R}=A$. $\mathbf{R}$ は可算集合ではないから, これは矛盾. したがって, $(X,\mathfrak{O}_u)$ は第 2 可算公理をみたさない.

3. X を第二可算公理をみたす位相空間とする. このとき, 高々可算個の元からなる X の位相の基底 $\mathfrak{B}$ が存在する.

まず, X が第一可算公理をみたすことを示す. $x\in X$ に対して, x を含む $\mathfrak{B}$ の元全体の集合を $\mathfrak{U}^*(x)$ とおく. このとき, $\mathfrak{B}$ は高々可算だから, $\mathfrak{U}^*(x)$ は高々可算. また, U を x の近傍とすると, X のある開集合 O が存在し, $x\in O\subset U$ となる. よって, 基底の定義より, x は $\mathfrak{B}$ のある元に含まれる. したがって, $\mathfrak{U}^*(x)$ は x の基本近傍系となる. 以上より, X は第一可算公理をみたす.

次に, X が可分であることを示す. $\mathfrak{B}$ の各元から 1 点ずつ選んで得られる X の部分集合を A とおく. このとき, $\mathfrak{B}$ は高々可算だから, A は高々可算. また, $(X\setminus A)^i\neq\emptyset$ であると仮定すると, ある $O\in\mathfrak{B}$ が存在し, $O\subset(X\setminus A)^i$. これは A の定義に矛盾. よって, A は稠密. したがって, X は可分.