§12. 誘導位相

1つの集合から位相空間の族への写像の族, あるいは位相空間の族から1つの集合への写像の族から新たな位相空間を作ることができる.

まず, 1つの集合から位相空間の族への写像の族があたえられているとする. このとき, 定義域の位相で, 各写像が連続となるものを考えよう. 例えば, 離散位相はそのような位相の例となるが, ここでは逆にできるだけ小さい位相について考えよう.

定義 X を空でない集合, $((X_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とし, 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して, X から X_λ への写像 f_λ があたえられているとする. このとき, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda^{-1}(\mathfrak{O}_\lambda)$ により生成される X の位相を $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ による誘導位相または弱位相という.

上の定義において, 各 f_λ が連続となるためには少なくとも f_λ による $(X_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ の開集合の逆像は X の開集合でなければならないから, $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ による誘導位相は各 f_λ が連続となる X の位相の中で最も小さい.

例 (相対位相)

$(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とし, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ とする. 更に, ι を A から X への包含写像とする. このとき, $O \in \mathfrak{O}$ とすると,

$$\iota^{-1}(O) = O \cap A.$$

§8 において示したことから分かるように, $\iota^{-1}(\mathfrak{O})$ により生成される A の位相は A の $\mathfrak{O}$ に関する相対位相に他ならない. すなわち, 包含写像による部分集合の誘導位相は相対位相に一致する.

例 (積位相)

$(X, \mathfrak{O}_X)$, $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ を位相空間, p_X, p_Y をそれぞれ $X \times Y$ から X, Y への射影, すなわち

$$p_X(x, y) = x, \quad p_Y(x, y) = y \quad ((x, y) \in X \times Y)$$

とする. このとき, $\{p_X, p_Y\}$ による $X \times Y$ の誘導位相を $(X, \mathfrak{O}_X)$ と $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ の直積位相, または単に積位相という. また, 積位相を考えた位相空間 $X \times Y$ を直積位相空間, 直積空間, または単に積空間という.

積位相の基底としては, 次に述べるようなものを選ぶことができる.

定理 $(X, \mathfrak{O}_X)$, $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ を位相空間とし, $X \times Y$ の部分集合系 $\mathfrak{O}_X \times \mathfrak{O}_Y$ を

$$\mathfrak{O}_X \times \mathfrak{O}_Y = \{O_X \times O_Y | O_X \in \mathfrak{O}_X,\ O_Y \in \mathfrak{O}_Y\}$$

により定める. このとき, $\mathfrak{O}_X \times \mathfrak{O}_Y$ は $(X, \mathfrak{O}_X)$ と $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ の積位相の基底.

証明 写像の逆像および開集合の性質より, $p_X^{-1}(\mathfrak{O}_X) \cup p_Y^{-1}(\mathfrak{O}_Y)$ の有限個の元の共通部分はある $O_X \in \mathfrak{O}_X$, $O_Y \in \mathfrak{O}_Y$ を用いて, $p_X^{-1}(O_X) \cap P_Y^{-1}(O_Y)$ と表すことができる. ここで,

$$\begin{aligned} p_X^{-1}(O_X) \cap P_Y^{-1}(O_Y) &= (O_X \times Y) \cap (X \times O_Y) \\ &= O_X \times O_Y. \end{aligned}$$

よって, $\mathfrak{O}_X \times \mathfrak{O}_Y$ は $(X, \mathfrak{O}_X)$ と $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ の積位相の基底. □

上の定理において, $\mathfrak{O}_X \times \mathfrak{O}_Y$ の元を $X \times Y$ の基本開集合または初等開集合という.

上の例において述べた積位相を一般化するために, §2 においても触れた選択公理について, ここでもう少し述べておこう.

定義　$(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を集合族とする．Λ から $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ への写像 f で, 任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して, $f(\lambda)\in X_\lambda$ となるもの全体の集合を $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ と表し, $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の直積という．また, 各 X_λ を直積因子という．

注意　上の定義において, $\Lambda=\{1,2\}$ のときは, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は X_1 と X_2 の直積 $X_1\times X_2$ と同一視することができる．

また, $\Lambda=\{1,2,\dots,n\}$ のときは $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ または $\prod_{i=1}^{n} X_i$ とも表す．

更に, $\Lambda=\mathbf{N}$ のときは, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ とも表す．

選択公理は次のように述べることができる．

選択公理　$(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が空でない集合からなる集合族ならば, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\neq\emptyset$.

$(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を空でない集合からなる集合族とし, $X=\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とおく．このとき, 選択公理により, $f\in X$ が存在する．f を $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の選択関数という．また, $\lambda\in\Lambda$ に対して, $f(\lambda)$ を f の λ 成分という．f に $f(\lambda)$ を対応させることにより定まる X から X_λ への写像を p_λ と表し, X から X_λ への射影という．

さて, 上の例において述べた積位相は次のように一般化することができる．

定義　$((X_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とし, $X=\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とおく．また, $\lambda\in\Lambda$ に対して, p_λ を X から X_λ への射影とする．このとき, $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ による X の誘導位相を $((X_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ の直積位相, または単に積位相という．また, 積位相を考えた位相空間 X を直積位相空間, 直積空間, または単に積空間という．

上の定義において, 積位相の基底 $\mathfrak{B}$ としては,

$$\mathfrak{B}=\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \,\middle|\, O_\lambda\in\mathfrak{O}_\lambda \text{ で有限個の } \lambda \text{ を除いて } O_\lambda=X_\lambda\right\}$$

を選ぶことができる．証明は上の定理と同様である．また, $\mathfrak{B}$ の元を X の基本開集合または初等開集合という．

次に, 位相空間の族から 1 つの集合への写像の族があたえられているとする．このとき, 値域の位相で, 各写像が連続となるものを考えよう．例えば, 密着位相はそのような位相の例となるが, ここでは逆にできるだけ大きい位相について考えよう．

X を空でない集合, $((X_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とし, 各 $\lambda\in\Lambda$ に対して, X_λ から X への写像 f_λ があたえられているとする．このとき, X の部分集合系 $\mathfrak{O}$ を

$$\mathfrak{O}=\{O\subset X \mid \text{任意の } \lambda\in\Lambda \text{ に対して } f_\lambda^{-1}(O)\in\mathfrak{O}_\lambda\}$$

により定める．このとき, 写像の逆像および開集合の性質より, $\mathfrak{O}$ は X の位相となることが容易に分かる．また, 定義より, $\mathfrak{O}$ は各 f_λ が連続となる X の位相の中で最も大きい．$\mathfrak{O}$ を $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ による誘導位相という．

例 (直和位相)

$((X_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とし, $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の直和 $\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を X とおく．また, $\lambda\in\Lambda$ に対して, X_λ から X への写像 ι_λ を

$$\iota_\lambda(x)=x \quad (x\in X_\lambda)$$

により定める．このとき, X の部分集合系 $\mathfrak{O}$ を

$$\mathfrak{O} = \{O \subset X | \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } \iota_\lambda^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_\lambda\}$$

により定めると, ι_λ の定義より,

$$\mathfrak{O} = \left\{ \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \,\middle|\, \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } O_\lambda \in \mathfrak{O}_\lambda \right\}$$

である．よって, 問題 8 において扱ったように, $(\iota_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ による X の誘導位相は $((X_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ の直和位相に他ならない.

もう 1 つの例を述べるための準備として, 同値関係について簡単に述べておこう．X を空でない集合とし, $X \times X$ の任意の元に対して, みたすかみたさないかを判定できる規則 R があたえられているとする．このとき, R を X 上の 2 項関係という．$(x, y) \in X \times X$ が R をみたすとき, xRy と表す.

定義　X を空でない集合, R を X 上の 2 項関係とし, $x, y, z \in X$ とする．次の (1)〜(3) がなりたつとき, R を同値関係という.

(1) 任意の x に対して, xRx. (反射律)
(2) xRy ならば, yRx. (対称律)
(3) xRy かつ yRz ならば, xRz. (推移律)

R が同値関係のとき, xRy となる x, y に対して, x と y は同値であるという.

なお, 同値関係は $\sim$ という記号を用いることが多い.

X を空でない集合, $\sim$ を X 上の同値関係とする．$x \in X$ に対して, X の部分集合 $C(x)$ を

$$C(x) = \{y \in X | xRy\}$$

により定める．$C(x)$ を $\sim$ による x の同値類, $C(x)$ の各元を $C(x)$ の代表という.

推移律より, $x, y \in X$ に対して $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ ならば, $C(x) = C(y)$ である．更に, 反射律より, $\sim$ による同値類全体は X を互いに交わらない部分集合の和に分解する.

$\sim$ による同値類全体の集合を $X/\sim$ と表し, X の $\sim$ による商集合という．$x \in X$ に $C(x) \in X/\sim$ を対応させると, この対応は X から $X/\sim$ への全射を定める．この写像を自然な射影または商写像という.

あたえられた位相空間に同値関係を定め, 商集合を考えるといった場面は, 例えば, 位相幾何学を始めとする幾何学においてよく現れる．このとき, 商集合は次のように自然に位相空間となる.

例 (商位相)

$(X, \mathfrak{O})$ を位相空間, $\sim$ を X 上の同値関係, π を自然な射影とする．このとき, $X/\sim$ の π による誘導位相を商位相という．また, 商位相を考えた位相空間 $X/\sim$ を商位相空間, または単に商空間という.

問題 12

1. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, $\mathfrak{O}_X$, $\mathfrak{O}_Y$ をそれぞれ d_X, d_Y により定まる X, Y の位相とする. 問題 5 において扱った X と Y の直積距離により定まる $X \times Y$ の位相は $(X, \mathfrak{O}_X)$ と $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ の積位相に一致することを示せ.

2. $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を空でない集合からなる集合族とし, $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ とおく. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して, X から X_λ への射影 p_λ は全射であることを示せ.

3. 位相空間の族 $((X_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ に対して, $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ とおき, $((X_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ の積位相を考える. また, $\lambda \in \Lambda$ に対して, p_λ を X から X_λ への射影とする. 更に, $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ を位相空間, f を Y から X への写像とする. f が連続であることと任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, $p_\lambda \circ f$ が連続であることは同値であることを示せ.

4. 実数を成分とする n 次の正方行列全体の集合を $M_n(\mathbf{R})$ と表す. $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ に対して, A と B が相似のとき, すなわち $B = P^{-1}AP$ となる n 次の正則行列 P が存在するとき, $A \sim B$ と定める. $\sim$ は $M_n(\mathbf{R})$ 上の同値関係であることを示せ.

5. $(X, \mathfrak{O}_X)$ を位相空間, $\sim$ を X 上の同値関係とし, 商空間 $X/\sim$ を考える. また, π を X から $X/\sim$ への自然な射影とする. 更に, $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ を位相空間, f を $X/\sim$ から Y への写像とする. f が連続であることと $f \circ \pi$ が連続であることは同値であることを示せ.

問題 12 の解答

1. d' を X と Y の直積距離とする．また, $\mathfrak{O}_{d'}$ を d' により定まる $X \times Y$ の位相, $\mathfrak{O}_{X\times Y}$ を $(X, \mathfrak{O}_X)$ と $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ の積位相とする．

まず, $(x, y) \in X \times Y$, $\varepsilon > 0$ に対して, $x' \in B_X\left(x; \frac{\varepsilon}{2}\right)$, $y' \in B_Y\left(y; \frac{\varepsilon}{2}\right)$ とする．ただし, $B_X\left(x; \frac{\varepsilon}{2}\right)$ は d_X に関する x の $\frac{\varepsilon}{2}$ 近傍で, $B_Y\left(y; \frac{\varepsilon}{2}\right)$ についても同様である．このとき,

$$\begin{aligned} d'((x, y), (x', y')) &= d_X(x, x') + d_Y(y, y') \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

すなわち, $d'((x, y), (x', y')) < \varepsilon$ だから, $(x', y') \in B_{X\times Y}((x, y); \varepsilon)$．よって,

$$B_X\left(x; \frac{\varepsilon}{2}\right) \times B_Y\left(y; \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset B_{X\times Y}((x, y); \varepsilon).$$

すなわち, $B_{X\times Y}((x, y); \varepsilon) \in \mathfrak{O}_{X\times Y}$．更に, $B_{X\times Y}((x, y); \varepsilon)$ と表される $X \times Y$ の部分集合全体は $\mathfrak{O}_{d'}$ の基底となるから, $\mathfrak{O}_{d'} \subset \mathfrak{O}_{X\times Y}$．

次に,

$$(x, y) \in O_X \times O_Y \in \mathfrak{O}_X \times \mathfrak{O}_Y$$

とする．このとき, $x \in O_X \in \mathfrak{O}_X$ だから, $x \in B_X(x, \varepsilon_x) \subset O_X$ となる $\varepsilon_x > 0$ が存在する．同様に, $y \in B_Y(y, \varepsilon_y) \subset O_Y$ となる $\varepsilon_y > 0$ が存在する．ここで,

$$(x', y') \in B_{X\times Y}((x, y); \min\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\})$$

とすると,

$$\begin{aligned} d_X(x, x') &\leq d_X(x, x') + d_Y(y, y') \\ &= d'((x, y), (x', y')) \\ &< \min\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\} \\ &\leq \varepsilon_x. \end{aligned}$$

すなわち, $d_X(x, x') < \varepsilon_x$ だから, $x' \in B(x; \varepsilon_x)$．よって, $x' \in O_X$．同様に, $y' \in O_Y$．したがって,

$$B_{X\times Y}((x, y); \min\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\}) \subset O_X \times O_Y.$$

すなわち, $O_X \times O_Y \in \mathfrak{O}_{d'}$．更に, $\mathfrak{O}_X \times \mathfrak{O}_Y$ は $(X, \mathfrak{O}_X)$ と $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ の積位相の基底となるから, $\mathfrak{O}_{X\times Y} \subset \mathfrak{O}_{d'}$．

以上より, $\mathfrak{O}_{d'} = \mathfrak{O}_{X\times Y}$．

2. $\lambda \in \Lambda$ とする．まず, 選択公理より, $f \in X$ が存在する．ここで, $a \in X_\lambda$ に対して, $g \in X$ を

$$g(\mu) = \begin{cases} a & (\mu = \lambda), \\ f(\mu) & (\mu \in \Lambda,\ \mu \neq \lambda) \end{cases}$$

により定める．このとき,

$$\begin{aligned} p_\lambda(g) &= g(\lambda) \\ &= a. \end{aligned}$$

すなわち, $p_\lambda(g) = a$. よって, p_λ は全射.

3. まず, f が連続であると仮定する. 積位相の定義より, 任意の λ に対して, p_λ は連続. よって, $p_\lambda \circ f$ は連続.

逆に, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, $p_\lambda \circ f$ が連続であると仮定する. $O \in \mathfrak{O}_\lambda$ とすると, 仮定より,

$$\begin{aligned} f^{-1}(p_\lambda^{-1}(O)) &= (p_\lambda \circ f)^{-1}(O) \\ &\in \mathfrak{O}_Y. \end{aligned}$$

すなわち, $f^{-1}(p_\lambda^{-1}(O)) \in \mathfrak{O}_Y$. ここで, 積位相の定義より, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda^{-1}(\mathfrak{O}_\lambda)$ は $((X_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ の積位相の準基底. よって, f は連続.

4. $A, B, C \in M_n(\mathbf{R})$ とする.

まず, E を n 次の単位行列とすると,

$$A = E^{-1}AE.$$

ここで, E は正則だから, $A \sim A$. よって, $\sim$ は反射律をみたす.

次に, $A \sim B$ とすると, $B = P^{-1}AP$ となる n 次の正則行列 P が存在する. このとき,

$$\begin{aligned} A &= PBP^{-1} \\ &= (P^{-1})^{-1}BP^{-1}. \end{aligned}$$

すなわち,

$$A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}.$$

ここで, P^{-1} は正則だから, $B \sim A$. よって, $\sim$ は対称律をみたす.

更に, $A \sim B$ かつ $B \sim C$ とすると, $B = P^{-1}AP$, $C = Q^{-1}BQ$ となる n 次の正則行列 P, Q が存在する. このとき,

$$\begin{aligned} C &= Q^{-1}(P^{-1}AP)Q \\ &= (PQ)^{-1}A(PQ). \end{aligned}$$

すなわち,

$$C = (PQ)^{-1}A(PQ).$$

ここで, PQ は正則だから, $A \sim C$. よって, $\sim$ は推移律をみたす.

したがって, $\sim$ は $M_n(\mathbf{R})$ 上の同値関係.

5. まず, f が連続であると仮定する. 商位相の定義より, π は連続. よって, $\pi \circ f$ は連続.

逆に, $f \circ \pi$ が連続であると仮定する. $O \in \mathfrak{O}_Y$ とすると, 仮定より,

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(f^{-1}(O)) &= (f \circ \pi)^{-1}(O) \\ &\in \mathfrak{O}_X. \end{aligned}$$

すなわち, $\pi^{-1}(f^{-1}(O)) \in \mathfrak{O}_X$. よって, 商位相の定義より, $f^{-1}(O)$ は $X/\sim$ の開集合. したがって, f は連続.