§1. 連結空間

位相空間が連結であるとは, 大雑把に言えば全体として繋がっているということを意味する. ここでは, まず, 連結性よりは直感的に理解し易いと思われる弧状連結性について述べることから始めよう.

定義 X を位相空間とする.
閉区間 $[a, b]$ から X への連続写像 γ を X の道または弧という. このとき, $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ をそれぞれ γ の始点, 終点という.
$x, y \in X$ とする. x を始点, y を終点とする X の道 γ を x と y を結ぶ道という.
X の任意の 2 点を結ぶ道が存在するとき, X は弧状連結であるという. 弧状連結な位相空間を弧状連結空間という.
$A \subset X$ とする. A は相対位相に関して弧状連結なとき, 弧状連結であるという.

注意 上の定義において, $[a, b]$ の位相は $\mathbf{R}$ の部分空間としての相対位相を考えている.
X の道のことを X 内の曲線ともいう.
道で結ぶことができるという関係は同値関係となる.

例 X を密着空間とする. $x, y \in X$ に対して, $[a, b]$ から X への写像 γ を

$$\gamma(t) = \begin{cases} x & (t = a), \\ y & (t \neq a) \end{cases}$$

により定める. 位相空間から密着空間への任意の写像は連続だから, γ は x と y を結ぶ X の道である. よって, X は弧状連結. すなわち, 密着空間は弧状連結である.
一方, 2 点以上を含む離散空間は弧状連結ではないが, このことを示すには区間の連結性を用いる必要がある.

例 (凸集合)
$x, y \in \mathbf{R}^n$ に対して, x と y を結ぶ $\mathbf{R}^n$ の道 γ を

$$\gamma(t) = (1 - t)x + ty \quad (t \in [0, 1])$$

により定めることができる. この γ を線分という.
ここで, $A \subset \mathbf{R}^n$ とする. 任意の $x, y \in A$ に対して, 像が A に含まれるような x と y を結ぶ線分が存在するとき, A は凸であるという. 例えば, $\mathbf{R}^n$ 自身は凸である. また, $a \in \mathbf{R}^n$, $\varepsilon > 0$ とすると, a の ε 近傍 $B(a; \varepsilon)$ は凸である. 凸性の定義より, $\mathbf{R}^n$ の凸集合は弧状連結である.
同様に, 一般のノルム空間に対しても, 2 点を結ぶ線分や部分集合の凸性を考えることができる. このとき, ノルム空間の凸集合は弧状連結である.

次に示すように, 弧状連結性は連続写像によって不変である. このことを弧状連結性は連続写像によって遺伝するともいう.

定理 X, Y を位相空間, f を X から Y への連続写像とする. X が弧状連結ならば, $f(X)$ は弧状連結.

証明 $f(x), f(y) \in f(X)$ $(x, y \in X)$ とする. X は弧状連結だから, x と y を結ぶ X の道 γ が存在する. このとき, $f \circ \gamma$ は $f(x)$ と $f(y)$ を結ぶ $f(X)$ の道となる. よって, $f(X)$ は弧状連結. □

注意 上の定理より, 弧状連結性は同相な位相空間に対して不変な性質となる. すなわち, 2 つの位相空間が互いに同相なとき, 一方が弧状連結ならば, もう一方も弧状連結であり, 一方が弧

状連結でないならば, もう一方も弧状連結でない. 位相空間に対するこのような性質を位相的性質という.

次に, 連結性について述べよう.

定義 $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とする.
X が空でない 2 つの部分空間の直和として表されないとき, すなわち

$$X = U \cup V, \quad U \cap V = \emptyset \quad (U, V \in \mathfrak{O})$$

ならば, $U = X$, $V = \emptyset$ または $U = \emptyset$, $V = X$ となるとき, X は連結であるという. 連結な位相空間を連結空間という.
$A \subset X$ とする. A は相対位相に関して連結なとき, 連結であるという.

注意 上の定義より, 位相空間 X が連結であることと X の部分集合で開集合かつ閉集合となるものが X と $\emptyset$ のみであることは同値である.

例 X を密着空間とする. 密着空間の定義より, X の部分集合で開集合かつ閉集合となるものは X と $\emptyset$ のみである. よって, 上の注意より, X は連結. すなわち, 密着空間は連結である.

例 X を 2 点以上を含む離散空間とする. 離散空間の定義より, $x \in X$ とすると, $\{x\}$ は X の開集合かつ閉集合. また, X は 2 点以上を含むから. $\{x\} \neq X$. よって, 上の注意より, X は連結ではない. すなわち, 2 点以上を含む離散空間は連結ではない.

以下では, $\{p, q\}$ を 2 点 p, q からなる離散空間とする. このとき, 位相空間の連結性は次のように特徴付けることができる.

定理 X を位相空間とすると, 次の (1), (2) は同値.

(1) X は連結.
(2) X から $\{p, q\}$ への連続写像は定値写像に限る.

証明 (1) $\Rightarrow$ (2): f を X から $\{p, q\}$ への連続写像とする. このとき,

$$X = f^{-1}(p) \cup f^{-1}(q), \quad f^{-1}(p) \cap f^{-1}(q) = \emptyset.$$

ここで, f は連続だから, $f^{-1}(p)$ および $f^{-1}(q)$ は X の開集合. よって, X の連結性より, $f^{-1}(p) = X$, $f^{-1}(q) = \emptyset$ または $f^{-1}(p) = \emptyset$, $f^{-1}(q) = X$. すなわち, f は p にのみ, または q にのみ値をとる定値写像. したがって, X から $\{p, q\}$ への連続写像は定値写像に限る.
(2) $\Rightarrow$ (1): 対偶を示す.
X が連結でないと仮定する. 連結性の定義より, X の空でない開集合 U, V が存在し,

$$X = U \cup V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

ここで, X から $\{p, q\}$ への写像 f を

$$f(x) = \begin{cases} p & (x \in U), \\ q & (x \in V) \end{cases}$$

により定める. このとき, f は連続となるが, 定値写像ではない. □

次に示すように, 連結性は連続写像によって不変である. すなわち, 連結性は連続写像によって遺伝する. 特に, 連結性は位相的性質である.

定理 X, Y を位相空間, f を X から Y への連続写像とする. X が連結ならば, $f(X)$ は連結.

証明 g を $f(X)$ から $\{p,q\}$ への連続写像とする. f は連続だから, $g \circ f$ は X から $\{p,q\}$ への連続写像. よって, 仮定より, $g \circ f$ は定値写像. したがって, g は定値写像となるから, $f(X)$ は連結. □

また, $\mathbf{R}$ の連結部分集合について, 次がなりたつ.

定理 $\mathbf{R}$ の空でない連結部分集合は区間に限る.

証明 まず, A を $\mathbf{R}$ の連結部分集合とし, $x < y$ をみたす $x, y \in A$ に対して, $x < z < y$ ならば, $z \in A$ となることを背理法により示す. $z \notin A$ であると仮定し, A から $\{p,q\}$ への写像 f を

$$f(t) = \begin{cases} p & (t \in A,\ t < z), \\ q & (t \in A,\ t > z) \end{cases}$$

により定める. このとき, f は連続となるが, 定値写像ではないから, 矛盾. よって, $z \in A$.

したがって, A が有界なとき, A は開区間, 閉区間, 左半開区間, 右半開区間の何れかである. また, A が有界でないとき, A は $\mathbf{R}$, 無限開区間, 無限閉区間の何れかである.

逆に, A を区間とする. $A = [a,b]$ の場合のみ示す. f を $[a,b]$ から $\{p,q\}$ への連続写像とする. $f(a) = p$ としてよい. このとき, $[a,b]$ の部分集合 B を

$$B = \{x \in [a,b] | [a,x] \subset f^{-1}(p)\}$$

により定めると, $a \in B$ で, B は $[a,b]$ の閉集合. よって, $\max B$ が存在する.

ここで, $\max B = b$ であることを背理法により示す. $\max B < b$ であると仮定すると, f は連続だから, ある $\varepsilon > 0$ が存在し,

$$x \in [\max B - \varepsilon, \max B + \varepsilon] \cap [a,b]$$

ならば, $f(x) = p$. よって, $\max B + \varepsilon \in B$ となり, 矛盾. したがって, $\max B = b$. すなわち, f は定値写像となるから, A は連結. □

例 X を 2 点以上を含む離散空間とする. X が弧状連結ではないことを背理法により示そう. X が弧状連結であると仮定する. $x, y \in X$ を異なる 2 点とすると, x と y を結ぶ X の道

$$\gamma : [a,b] \to X$$

が存在する. ここで, γ は連続で, $\{x\}$ は X の開集合かつ閉集合であるから, $f^{-1}(x)$ は $[a,b]$ の開集合かつ閉集合. よって, $a \in f^{-1}(x)$ であることと $[a,b]$ が連結であることより, $f^{-1}(x) = [a,b]$. これは $f(b) = y$ であることに矛盾. したがって, X は弧状連結ではない.

最後に, 次を示しておこう.

定理 $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間, $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を X の連結部分集合からなる集合族とし, $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ とおく. 任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して, $A_\lambda \cap A_\mu \neq \emptyset$ ならば, A は連結.

証明 f を A から $\{p,q\}$ への連続写像とし, $\lambda_0 \in \Lambda$ および $x_0 \in A_{\lambda_0}$ を固定しておく. $f(x_0) = p$ としてよい. まず, f の A_{λ_0} への制限 $f|_{A_{\lambda_0}}$ は A_0 から $\{p,q\}$ への連続写像. A_{λ_0} は連結だから, $f|_{A_{\lambda_0}}$ は定値写像. $f(x_0) = p$ だから, $f|_{A_{\lambda_0}}$ は A_0 上で p に値をとる.

ここで, $\lambda \in \Lambda$ とする. 仮定より, $A_{\lambda_0} \cap A_\lambda \neq \emptyset$ だから, $f(x) = p$ となる $x \in A_\lambda$ が存在する. このとき, 上と同様に, $f|_{A_\lambda}$ は A_λ 上で p に値をとる. よって, A の定義より, f は A 上で p に値をとる定値写像. したがって, A は連結. □

問題 1

1. 弧状連結空間は連結であることを示せ.

2. X を位相空間とし, $A, B \subset X$ とする. A が連結で, $A \subset B \subset \overline{A}$ がなりたつならば, B は連結であることを示せ. ただし, $\overline{A}$ は A の閉包を表す. 特に, 連結部分集合の閉包は連結である.

3. $\mathbf{R}$ の部分空間 X を

$$X = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\}$$

により定める. X の空でない連結部分集合は 1 点のみからなることを示せ.

なお, すべての空でない連結部分集合が 1 点のみからなる位相空間を完全不連結であるという. 例えば, 離散空間は完全不連結である.

4. $A, B \subset \mathbf{R}^2$ をそれぞれ

$$A = \{(x,0) | 0 < x \leq 1\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) \middle| \, 0 < y \leq 1 \right\}, \quad B = A \cup \{(0,y) | 0 < y \leq 1\}$$

により定める.

(1) B は連結であることを示せ.

(2) B は弧状連結ではないことを示せ.

なお, $X \subset \mathbf{R}^2$ を

$$X = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \middle| \, x > 0 \right\} \cup \{(0,y) | -1 \leq y \leq 1\}$$

により定めると, X も連結であるが, 弧状連結ではないことが分かる. この X を位相幾何学者の正弦曲線ともいう.

5. $(X, \mathfrak{O}_X)$, $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ を位相空間とする. X および Y が連結であることと積空間 $X \times Y$ が連結であることは同値であることを示せ.

更に, 位相空間の族 $((X_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ に対して, 積空間 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を考えると, 任意の直積因子が連結であることと積空間が連結であることが同値であることが分かる. また, 弧状連結性についても同様である.

問題 1 の解答

1. X を弧状連結空間とし, $x_0 \in X$ を固定しておく. 仮定より, $x \in X$ とすると, x_0 と x を結ぶ X の道

$$\gamma_x : [a_x, b_x] \to X$$

が存在する. γ_x は連続で, $[a_x, b_x]$ は連結だから, $\gamma_x([a_x, b_x])$ は連結. 更に,

$$X = \bigcup_{x \in X} \gamma_x([a_x, b_x])$$

で, $x_0 \in \gamma_x([a_x, b_x])$. よって, X は連結.

2. 背理法により示す.

B が連結でないと仮定する. このとき, B から離散空間 $\{p, q\}$ への連続写像 f で, 定値写像でないものが存在する. f の A への制限 $f|_A$ は連続で, A は連結だから, $f|_A$ は定値写像. よって, $f|_A$ は p に値をとる, すなわち $A \subset f^{-1}(p)$ としてよい. 更に, f は定値写像ではないから, $f(x) = q$ となる $x \in B$ が存在する. このとき,

$$A \cap f^{-1}(q) = \emptyset.$$

ここで, $\{q\}$ は $\{p, q\}$ の開集合だから, $f^{-1}(q)$ は B の開集合. すなわち, 相対位相の定義より,

$$f^{-1}(q) = O \cap B$$

となる X の開集合 O が存在する. 上の 2 式より, $x \in O$ で,

$$A \cap O = \emptyset$$

だから, x は A の外点.

一方, $x \in B$ および $B \subset \overline{A}$ より, $x \in \overline{A}$ だから, x は A の外点ではない. これは矛盾. したがって, B は連結.

3. A を空でない X の連結部分集合とする.

まず, ある $n \in \mathbf{N}$ が存在し, $\frac{1}{n} \in A$ であるとする. このとき, $\{\frac{1}{n}\}$ は A の閉集合. 一方, $\frac{1}{n}$ の $\mathbf{R}$ におけるある近傍 U が存在し,

$$U \cap A = \left\{ \frac{1}{n} \right\}.$$

よって, $\{\frac{1}{n}\}$ は A の開集合. したがって, A の連結性より, $A = \{\frac{1}{n}\}$.

次に, $\frac{1}{n} \in A$ となる $n \in \mathbf{N}$ が存在しないとする. このとき, A は空でないから, $A = \{0\}$.

したがって, A は 1 点のみからなる. すなわち, X の空でない連結部分集合は 1 点のみからなる.

4. (1) まず, A は定義より, 弧状連結だから, 連結.

次に, $0 < y \leq 1$ に対して, A の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_n = \left(\frac{1}{n}, y \right) \quad (n \in \mathbf{N})$$

により定める. このとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $(0, y)$ に収束する. また, $A \subset \overline{A}$ だから, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\overline{A}$ の点列. $\overline{A}$ は $\mathbf{R}^2$ の閉集合だから, $(0, y) \in \overline{A}$. よって, $B \subset \overline{A}$.

一方, A, B の定義より, $A \subset B$.
したがって, A は連結で, $A \subset B \subset \overline{A}$ がなりたつから, B は連結.

(2) 背理法により示す.
B が弧状連結であると仮定する. このとき, $(0,1)$ と $(1,0)$ を結ぶ B の道

$$\gamma : [a,b] \to B$$

が存在する. また, $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}$ への写像 p を

$$p(x,y) = x \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2)$$

により定める. p は連続だから, p の B への制限 $p|_B$ は連続. 更に, γ は連続だから, $p|_B \circ \gamma$ は連続.

ここで, $[a,b]$ の部分集合 C を $C = \gamma^{-1}((0,1))$ により定める. $\{(0,1)\}$ は $\mathbf{R}$ の閉集合で, γ は連続だから, C は $[a,b]$ の閉集合. また, $t_0 \in C$ とすると, γ は連続だから, ある $\delta > 0$ が存在し,

$$I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [a,b]$$

とおくと, $t \in I$ ならば,

$$d(\gamma(t), \gamma(t_0)) < 1.$$

すなわち,

$$d(\gamma(t), (0,1)) < 1$$

だから,

$$\gamma(t) \notin \{(x,0) | 0 < x \leq 1\}.$$

よって,

$$(p|_B \circ \gamma)(I) \subset \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbf{N} \right\}.$$

I は区間だから, 連結. したがって, $(p|_B \circ \gamma)(I)$ は連結. 一方, 上の右辺の集合は完全不連結で, $(p|_B \circ \gamma)(t_0) = 0$ だから, $(p|_B \circ \gamma)(I) = \{0\}$. すなわち, $I \subset C$ だから, C は $[a,b]$ の開集合. 以上より, $C = [a,b]$. 一方, $\gamma(b) = (1,0)$ だから, これは矛盾. すなわち, B は弧状連結ではない.

5. まず, X および Y が連結であると仮定する. $x_0 \in X$ を固定しておき, Y から $X \times Y$ への写像 ι_Y を

$$\iota_Y(y) = (x_0, y) \quad (y \in Y)$$

により定めると, ι_Y は連続となる. Y は連結だから, $\iota_Y(Y)$, すなわち $\{x_0\} \times Y$ は連結. 同様に, 各 $y \in Y$ に対して, $X \times \{y\}$ は連結. ここで,

$$X \times Y = (\{x_0\} \times Y) \cup \left(\bigcup_{y \in Y} X \times \{y\} \right)$$

で, 集合 $\{x_0\} \times Y$, $X \times \{y\}$ $(y \in Y)$ のうちのどの 2 つも共通部分は空ではない. よって, $X \times Y$ は連結.

逆に, $X \times Y$ が連結であると仮定する. p_X を $X \times Y$ から X への射影とすると, p_X は連続で, $p_X(X \times Y) = X$. よって, X は連結. 同様に, Y は連結.