§2. 連結成分

位相空間に対して議論を行う際には, 連結成分というものに分けて考えることが多い. まず, 連結成分について述べるために, 次のように定められる 2 項関係を考えよう. X を位相空間とする. $x, y \in X$ に対して, x と y を含む X の連結部分集合が存在するとき, $x \sim y$ と表すことにする. このとき, 次がなりたつ.

定理 $\sim$ は X 上の同値関係.

証明 $x, y, z \in X$ とする.

まず, $\{x\}$ は連結で, $x \in \{x\}$. よって, $x \sim x$. したがって, $\sim$ は反射律をみたす.

次に, $x \sim y$ とする. このとき, $x, y \in A$ となる X の連結部分集合 A が存在する. すなわち, A は連結で, $y, x \in A$. よって, $y \sim x$. したがって, $\sim$ は対称律をみたす.

更に, $x \sim y$, $y \sim z$ とする. このとき, $x, y \in A$ となる X の連結部分集合 A および $y, z \in B$ となる X の連結部分集合 B が存在する. $y \in A \cap B$ だから, $A \cup B$ は連結. 更に, $x, z \in A \cup B$. よって, $x \sim z$. したがって, $\sim$ は推移律をみたす.

以上より, $\sim$ は X 上の同値関係. $\square$

そこで, 次のように定める.

定義 X を位相空間とし, $x \in X$ とする. X 上の同値関係 $\sim$ による x の同値類を x の連結成分, または単に成分という.

連結成分に関して, 次がなりたつ.

定理 X を位相空間とし, $x \in X$ とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.

(1) x の連結成分は x を含む X の連結部分集合全体の和集合. 特に, x の連結成分は x を含む X の最大の連結部分集合.

(2) x の連結成分は X の閉集合.

証明 x の連結成分を $C(x)$ と表す.

(1): x を含む X の連結部分集合全体の和集合を M と表す.

まず, $y \in C(x)$ とする. このとき, $\sim$ の定義より, $x, y \in A$ となる X の連結部分集合 A が存在する. M の定義より, $A \subset M$ だから, $y \in M$. よって, $C(x) \subset M$.

逆に, $y \in M$ とする. このとき, M の定義より, $x \in A$ となる X の連結部分集合 A が存在し, $y \in A$. よって, $\sim$ の定義より, $y \sim x$. したがって, $y \in C(x)$ だから, $M \subset C(x)$.

以上より, $C(x) = M$. すなわち, x の連結成分は x を含む X の連結部分集合全体の和集合.

(2): $C(x)$ は連結だから, $\overline{C(x)}$ は連結. よって, (1) より, $\overline{C(x)} \subset C(x)$. 一方, $C(x) \subset \overline{C(x)}$. したがって, $\overline{C(x)} = C(x)$ だから, $C(x)$, すなわち x の連結成分は X の閉集合. $\square$

例 上の定理の (1) より, 連結空間は連結成分が 1 つのみからなる位相空間ということができる.

例 問題 1 においても触れた完全不連結空間, すなわちすべての空でない連結部分集合が 1 点のみからなる位相空間は, すべての連結成分が 1 点のみからなる位相空間ということができる.

注意 X を位相空間とし, $x \in X$ とする. §1 において注意したように, X の 2 点を道で結ぶことができるという関係は同値関係である. この同値関係によって得られる x の同値類を x の弧状連結成分という. x の弧状連結成分は x と道で結ぶことのできる X の点全体の集合に一致する.

弧状連結成分は閉集合であるとは限らない. 例えば, $A, B \subset \mathbf{R}^2$ をそれぞれ

$$A = \{(x,0) | 0 < x \leq 1\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{n}, y\right) \middle| 0 < y \leq 1 \right\}, \quad B = A \cup \{(0,y) | 0 < y \leq 1\}$$

により定め, $\mathbf{R}^2$ の部分空間 B について考えよう. 問題 1 において扱ったことからも分かるように, $x \in A$ のとき, x の弧状連結成分は A である. しかし, $A \subsetneq B \subset \overline{A}$ だから, A は B の閉集合ではない.

次の例に示すように, 連結成分は開集合であるとは限らない.

例 問題 1 においても扱った完全不連結空間を考えよう. すなわち,

$$X = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbf{N} \right\}$$

である. このとき, $0 \in X$ の連結成分は $\{0\}$. ここで, O を 0 を含む $\mathbf{R}$ の開集合とすると, ある $n \in \mathbf{N}$ が存在し, $\frac{1}{n} \in O$. よって, $\{0\}$ は X の開集合ではない.

次に述べる局所連結性という性質は連結成分が開集合となるための十分条件をあたえる.

定義 X を位相空間とする. X の任意の点が連結な近傍からなる基本近傍系をもつとき, すなわち任意の $x \in X$ および x の任意の近傍 U に対して, $V \subset U$ となる x の連結な近傍 V が存在するとき, X は局所連結であるという. 局所連結な位相空間を局所連結空間という.

定義より, 局所連結性は位相的性質である. また, 局所連結空間は次のように特徴付けることができる.

定理 X を位相空間とする. このとき, 次の (1)〜(3) は同値.

(1) X は局所連結.

(2) O を X の開集合となる部分空間とすると, O の連結成分はすべて X の開集合.

(3) X の連結開集合全体は X の位相の基底.

証明 (1) $\Rightarrow$ (2): $x \in O$ とする. 部分空間 O における x の連結成分を $C_O(x)$ と表す. $y \in C_O(x)$ とする. O は X の開集合だから, X における y の近傍. よって, 仮定より, $V \subset O$ となる y の連結な近傍 V が存在する. このとき, 上の定理の (1) より, $V \subset C_O(x)$. したがって, y は $C_O(x)$ の内点. y は任意だから, $C_O(x)$ は X の開集合.
(2) $\Rightarrow$ (3): O を X の開集合とする. 上と同じ記号を用いると,

$$O = \bigcup_{x \in O} C_O(x).$$

仮定より, 各 $C_O(x)$ は X の開集合. よって, X の連結開集合全体は X の位相の基底.
(3) $\Rightarrow$ (1): $x \in X$ とし, U を x の近傍とする. このとき, U の内部 U^i は x を含む X の開集合. よって, 仮定より, $x \in V \subset U$ となる X の連結開集合 V が存在する. したがって, V は局所連結. □

注意 2 つめの定理の (2) と上の定理の (2) より, 特に, 局所連結空間の連結成分は開集合かつ閉集合である.

例 $a \in \mathbf{R}^n$, $\varepsilon > 0$ とする. このとき, §1 において述べたように, a の ε 近傍 $B(a;\varepsilon)$ は弧状連結である. 更に, 問題 1 において扱ったように, 弧状連結空間は連結だから, $B(a;\varepsilon)$ は連結である.
ここで,

$$\mathfrak{U}^*(a) = \{B(a;\varepsilon) | \varepsilon > 0\}$$

とおく. このとき, $\mathfrak{U}^*(a)$ は a の基本近傍系. よって, $\mathbf{R}^n$ は局所連結である.

同様に, 一般のノルム空間も局所連結である.

例 1つめの注意においた現れた位相空間 B は, 問題1において扱ったように連結であった. しかし, B は局所連結ではない. 実際, $(0,1) \in B$ の近傍 U を

$$U = \{(x,y) | x \in \mathbf{R},\ y > 0\} \cap B$$

により定めると, $V \subset U$ となる $(0,1)$ の近傍 V は無限個の連結成分をもってしまう.

また, 局所弧状連結性というものを考えることもできる.

定義 X を位相空間とする. X の任意の点が弧状連結な近傍からなる基本近傍系をもつとき, すなわち任意の $x \in X$ および x の任意の近傍 U に対して, $V \subset U$ となる x の弧状連結な近傍 V が存在するとき, X は局所弧状連結であるという. 局所弧状連結な位相空間を局所弧状連結空間という.

定義より, 局所弧状連結性は位相的性質である.

例 4つめの例において述べたことより, $\mathbf{R}^n$ は局所弧状連結である.
一般に, 弧状連結な近傍は連結な近傍でもあるから, 局所弧状連結空間は局所連結である.

次の例に示すように, 局所連結空間は局所弧状連結であるとは限らない.

例 $(X, \mathfrak{O})$ を余有限位相をもつ位相空間とする. すなわち,

$$\mathfrak{O} = \{O \subset X | X \setminus O \text{ は有限集合}\} \cup \{\emptyset\}$$

である.
まず, X を有限集合とする. このとき, $x \in X$ とすると, $X \setminus \{x\}$ は有限集合だから, $\{x\} \in \mathfrak{O}$. よって, $\mathfrak{O}$ は離散位相である. X が1点のみからなるとき, X は連結かつ弧状連結かつ局所連結かつ局所弧状連結であることは明らかである. また, X が2点以上を含むとき, §1において述べたように, X は連結でも弧状連結でもない. しかし, x の任意の近傍 U に対して, $\{x\}$ は $\{x\} \subset U$ となる x の連結かつ弧状連結な近傍となる. よって, X は局所連結かつ局所弧状連結.
次に, X を無限集合とする. $U, V \in \mathfrak{O}$ が

$$X = U \cup V, \quad U \cap V = \emptyset$$

をみたすとする. $U, V \neq \emptyset$ であると仮定すると, 余有限位相の定義より, U, V は有限集合. これは X が無限集合であることに矛盾. よって, $U = X$, $V = \emptyset$ または $U = \emptyset$, $V = X$. すなわち, X は連結. 更に, O を X の開集合となる部分空間とすると, O の位相は余有限位相となるから, O は連結. したがって, 上の定理より, X は局所連結. しかし, X が可算無限集合のとき, X は弧状連結でも局所弧状連結でもないことが知られている.

例 (櫛空間)
1つめの注意や5つめの例において現れた位相空間 B に原点を付け加えたものを X とおく. すなわち,

$$X = \{(x,0) | 0 < x \leq 1\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{n}, y\right) \middle| 0 < y \leq 1 \right\} \cup \{(0,y) | 0 \leq y \leq 1\}$$

である. この X を櫛空間という. このとき, X は弧状連結となる. しかし, 5つめの例の場合と同様の理由により, X は局所弧状連結ではない.

問題 2

1. X を位相空間とする. X の連結成分が有限個ならば, X の任意の連結成分は開集合かつ閉集合であることを示せ.

2. X を位相空間, A を空でない X の連結部分集合とする. A が X の開集合かつ閉集合ならば, A は X の連結成分であることを示せ.

3. 位相空間の族 $((X_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ に対して, $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とおき, $((X_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ の積位相を考える. また, $\lambda \in \Lambda$ に対して, p_λ を X から X_λ への射影とする. $f \in X$ に対して, C を f の連結成分とし, 更に, $\lambda \in \Lambda$ に対して, C_λ を $p_\lambda(f)$ の連結成分とすると, $C = \prod_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ であることを示せ.

4. 有理数全体の集合を $\mathbf{Q}$ と表す. $\mathbf{Q}$ を $\mathbf{R}$ の部分集合とみなすと, $\mathbf{Q}$ は完全不連結であることを示せ.

5. 2 次の実正方行列全体の集合を $M_2(\mathbf{R})$ と表し, 対応

$$M_2(\mathbf{R}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$$

により, $M_2(\mathbf{R})$ を $\mathbf{R}^4$ と同一視する. また, 2 次の直交行列全体の集合を $\mathrm{O}(2)$ と表し, $\mathrm{O}(2)$ を $M_2(\mathbf{R})$ の部分空間とみなす. $\mathrm{O}(2)$ の弧状連結成分の個数は 2 であることを示せ.

一般に, n 次の実正方行列全体の集合を $M_n(\mathbf{R})$ と表すと, $M_n(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}^{n^2}$ と同一視することができる. 更に, n 次の直交行列全体の集合を $\mathrm{O}(n)$ と表し, $\mathrm{O}(n)$ を $M_n(\mathbf{R})$ の部分空間とみなすと, $\mathrm{O}(n)$ の弧状連結成分の個数は 2 であることが分かる.

6. X を局所弧状連結空間とする.

(1) X の弧状連結成分は連結成分に一致することを示せ. 特に, 局所弧状連結空間の弧状連結成分は開集合かつ閉集合である.

(2) X の連結開集合は弧状連結であることを示せ. 特に, $\mathbf{R}^n$ の連結開集合は弧状連結である.

問題 2 の解答

1. $C_1, C_2, \ldots, C_n$ を X のすべての連結成分とし, $j = 1, 2, \ldots, n$ とする. このとき, C_j は X の閉集合.

また, X は $C_1, C_2, \ldots, C_n$ の直和として,

$$X = \coprod_{i=1}^{n} C_i$$

と表すことができるから,

$$C_j = X \setminus \left(\bigcup_{i \neq j} C_i \right).$$

ここで, $\bigcup\limits_{i \neq j} C_i$ は有限個の X の閉集合の和集合だから, X の閉集合. よって, C_j は X の開集合.

したがって, C_j は X の開集合かつ閉集合. すなわち, X の任意の連結成分は開集合かつ閉集合.

2. $x \in A$ とする. A が x の連結成分であることを背理法により示す.

A が x の連結成分ではないと仮定する. A は連結だから, 連結成分の性質より, $A \subsetneq B$ となる X の連結部分集合 B が存在する. このとき,

$$B = A \cup (B \setminus A), \quad A \cap (B \setminus A) = \emptyset.$$

ここで, $A \subsetneq B$ で, A は X の空でない開集合だから, A は B の空でない開集合. また, A は X の閉集合でもあるから, $B \setminus A$ は B の空でない開集合. これは B が連結であることに矛盾. よって, A は x の連結成分.

3. まず, C は連結で, p_λ は連続だから, $p_\lambda(C)$ は連結. また, $p_\lambda(f) \in C_\lambda$. よって, 連結成分の性質より, $p_\lambda(C) \subset C_\lambda$. したがって, $C \subset \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$.

逆に, 各 C_λ は連結だから, $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ は連結. また, $p_\lambda(f) \in C_\lambda$ だから, $f \in \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$. よって, 連結成分の性質より, $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \subset C$.

以上より, $C = \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$.

4. 2 点以上を含む $\mathbf{Q}$ の連結部分集合は存在しないことを示せばよい. このことを背理法により示す.

A を 2 点 x, y を含む $\mathbf{Q}$ の連結部分集合とする. $x < y$ としてよい. このとき, $x < a < y$ となる無理数 $a \in \mathbf{R}$ が存在する. よって,

$$O_1 = \{z \in \mathbf{R} | z < a\}, \quad O_2 = \{z \in \mathbf{R} | z > a\}$$

とおくと, O_1, O_2 は $\mathbf{R}$ の開集合で,

$$A = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2), \quad (A \cap O_1) \cap (A \cap O_2) = \emptyset.$$

ここで, $x \in A \cap O_1$, $y \in A \in O_2$ だから, $A \cap O_1$, $A \cap O_2$ は $\mathbf{Q}$ の空でない開集合. これは A が連結であることに矛盾. したがって, 2 点以上を含む $\mathbf{Q}$ の連結部分集合は存在しない.

5. 直交行列の行列式は 1 か -1 であることに注意する.

まず, 行列式が 1 の 2 次の直交行列全体の集合を SO(2) と表す. $A \in \mathrm{SO}(2)$ とすると, ある $\theta \in \mathbf{R}$ が存在し,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

ここで, $[0,1]$ から O(2) への写像 γ を

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t\theta & -\sin t\theta \\ \sin t\theta & \cos t\theta \end{pmatrix} \quad (t \in [0,1])$$

により定めると, γ は 2 次の単位行列 E と A を結ぶ O(2) の道. よって, SO(2) は E を含む弧状連結成分に含まれる. ここで, $B \in \mathrm{O}(2)$, $\det B = -1$ とし, E と B を結ぶ O(2) の道 $\tilde{\gamma}$ が存在すると仮定する. このとき, $[0,1]$ から $\mathbf{R}$ への写像 g を

$$g(t) = \det \tilde{\gamma}(t)$$

により定めると, $[0,1]$ は連結だから, $g([0,1])$ は連結. しかし, $g([0,1]) \in \{0,1\}$ で,

$$\begin{aligned} g(0) &= \det E \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(1) &= \det B \\ &= -1 \end{aligned}$$

だから, 矛盾. よって, SO(2) は E を含む O(2) の弧状連結成分.

同様に, 行列式が -1 の 2 次の直交行列全体の集合は O(2) の弧状連結成分.

したがって, O(2) の弧状連結成分の個数は 2.

6. (1) $(C_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の弧状連結成分全体からなる集合族とする. このとき,

$$X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$$

と表すことができる. また, X は局所弧状連結だから, 各 C_λ は X の開集合. ここで, $\mu \in \Lambda$ とすると,

$$C_\mu = X \setminus \left(\bigcup_{\lambda\neq\mu} C_\lambda \right).$$

$\bigcup\limits_{\lambda\neq\mu} C_\lambda$ は開集合の和集合だから, X の開集合. よって, C_μ は X の閉集合. したがって, C_μ は X の空でない開集合かつ閉集合だから, X の連結成分. すなわち, 局所弧状連結空間の弧状連結成分は連結成分に一致する.

(2) U を X の連結開集合とする.

$U = \emptyset$ のとき, U は弧状連結.

$U \neq \emptyset$ のとき, $x \in U$ とする. X は局所弧状連結だから, $V \subset U$ となる x の弧状連結な近傍 V が存在する. よって, U における x の弧状連結成分は U の開集合. したがって, (1) と同様の議論により, U の各弧状連結成分は U の開集合かつ閉集合. ここで, U は連結だから, U の弧状連結成分は 1 つのみ. すなわち, U は弧状連結.

したがって, X の連結開集合は弧状連結.