§3. コンパクト空間

微分積分において学ぶように, 閉区間で定義された実数値連続関数は最大値および最小値をもつが, この事実は閉区間のコンパクト性に基づいている. まず, 位相空間のコンパクト性に関する言葉について用意しておこう.

定義 X を位相空間とし, $A \subset X$ とする. また, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の部分集合族とする.

$A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ となるとき, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を A の被覆という. 特に, 各 U_λ が X の開集合のとき, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を A の開被覆という. また, Λ が有限集合のとき, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を A の有限被覆という.

$M \subset \Lambda$ とする. $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ および $(U_\mu)_{\mu\in M}$ が A の被覆となるとき, $(U_\mu)_{\mu\in M}$ を $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の部分被覆という.

A の任意の開被覆が有限部分被覆をもつとき, A はコンパクトであるという. コンパクトな位相空間をコンパクト空間という.

最初に述べたことに関連して, コンパクト空間で定義された実数値連続関数は最大値と最小値をもつことが分かるが, ここではまず, そのような関数の有界性のみを示しておこう.

定理 コンパクト空間で定義された実数値連続関数は有界.

証明 X をコンパクト空間, f を X で定義された実数値連続関数とする. f は連続だから, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して, f による閉区間 $(-n, n)$ の逆像 $f^{-1}((-n,n))$ は X の開集合. 更に,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}((-n,n))$$

だから, X の部分集合族 $(f^{-1}((-n,n)))_{n\in\mathbf{N}}$ は X の開被覆. ここで, X はコンパクトだから, $(f^{-1}((-n,n)))_{n\in\mathbf{N}}$ の有限部分被覆が存在する. 更に, $n, m \in \mathbf{N}$, $n < m$ ならば,

$$f^{-1}((-n,n)) \subset f^{-1}((-m,m))$$

であることに注意すると, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $X = f^{-1}((-N,N))$. よって, $f(X) \subset (-N,N)$. すなわち, 任意の $x \in X$ に対して, $|f(x)| < N$. したがって, f は有界. □

次に, コンパクト空間の例について述べよう.

例 密着空間や有限個の点からなる位相空間はコンパクトである. 実際, これらの位相空間の開集合はそもそも有限個しかない.

例 X を離散空間とする.

X が有限集合のとき, 上の例より, X はコンパクト.

X が無限集合のとき, 離散位相の定義より, $(\{x\})_{x\in X}$ は X の開被覆である. しかし, X は無限集合だから, $(\{x\})_{x\in X}$ の有限部分被覆は存在しない. よって, X はコンパクトではない.

閉区間がコンパクトであることは定理として述べておこう.

Heine-Borel の被覆定理 閉区間はコンパクト.

証明 背理法により示す.

閉区間 $[a,b]$ がコンパクトではないと仮定する. このとき, $[a,b]$ の開被覆 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ で, 有限部分被覆をもたないものが存在する. よって, 閉区間 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ の内の少なくとも一方は有限個の $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の元によって被覆することはできない. そのような閉区間を 1 つ選んでおき, $[a_1, b_1]$ とする.

同様に, 閉区間 $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ の内の少なくとも一方は有限個の $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の元によって被覆することはできない. そのような閉区間を 1 つ選んでおき, $[a_2, b_2]$ とする.

以下同様に, この操作を繰り返し, $n \in \mathbf{N}$ に対して, 閉区間 $\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$, $\left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$ の内の有限個の $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の元によって被覆することができないものを 1 つ選んでおき, $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ とする.

このとき, 有界閉区間の列 $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbf{N}}$ は

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad (n \in \mathbf{N})$$

をみたし,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}(b-a) \\ &= 0.\end{aligned}$$

したがって, 区間縮小法より, $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ は 1 点のみからなる. この 1 点を c とおく.

ここで, $c \in [a, b]$ だから, ある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在し, $c \in U_{\lambda_0}$. また, U_{λ_0} は $\mathbf{R}$ の開集合だから, ある $\varepsilon > 0$ が存在し, $B(c;\varepsilon) \subset U_{\lambda_0}$. 一方,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$$

だから, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば, $[a_n, b_n] \subset B(c;\varepsilon)$. すなわち, $[a_n, b_n] \subset U_{\lambda_0}$. これは $[a_n, b_n]$ の選び方に矛盾. 以上より, $[a, b]$ はコンパクト. □

次に示すように, コンパクト性は位相的性質である.

定理 X, Y を位相空間, f を X から Y への連続写像とする. X がコンパクトならば, $f(X)$ はコンパクト.

証明 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $f(X)$ の開被覆とする. f は連続だから, $(f^{-1}(U_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ は X の開被覆. ここで, X はコンパクトだから, $(f^{-1}(U_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆が存在する. すなわち, ある $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在し,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\lambda_i}).$$

よって,

$$\begin{aligned}f(X) &= f\left(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\lambda_i})\right) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(U_{\lambda_i})) \\ &\subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}.\end{aligned}$$

すなわち,

$$f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$$

だから, $(U_{\lambda_i})_{i=1}^{n}$ は $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆. したがって, $f(X)$ はコンパクト. □

距離空間のコンパクト部分集合に関する基本的性質を述べるため, 次の言葉を定めよう.

定義 (X,d) を距離空間とし, $A \subset X$ とする. このとき,

$$\delta(A) = \sup\{d(x,y) | x,y \in A\}$$

とおき, これを A の直径という. $\delta(A) \in \mathbf{R}$ のとき, A は有界であるという.

距離空間のコンパクト部分集合に関して, 次がなりたつ.

定理 距離空間のコンパクト部分集合は有界閉集合.

証明 (X,d) を距離空間, A を X のコンパクト部分集合とする.

まず, $x_0 \in X$ を固定しておく. このとき, $(B(x_0;n))_{n\in\mathbf{N}}$ は A の開被覆. ここで, A はコンパクトだから, $(B(x_0;n))_{n\in\mathbf{N}}$ の有限部分被覆が存在する. 更に, $n,m \in \mathbf{N}$, $n < m$ ならば, $B(x_0;n) \subset B(x_0;m)$ であることに注意すると, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $A \subset B(x_0;N)$. よって, $x,y \in A$ とすると, 三角不等式より,

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,x_0) + d(x_0,y) \\ &< N + N \\ &= 2N. \end{aligned}$$

したがって, $\delta(A) \leq 2N$ となり, A は有界である.

次に, $\overline{A} \subset A$ がなりたつことを示す. $x \in X \setminus A$ とする. このとき, $\left(X \setminus \overline{B\left(x;\frac{1}{n}\right)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ は A の開被覆. ここで, A はコンパクトだから, 上と同様の議論により, ある $M \in \mathbf{N}$ が存在し,

$$A \subset X \setminus \overline{B\left(x;\frac{1}{M}\right)}.$$

よって,

$$A \cap B\left(x;\frac{1}{M}\right) = \emptyset$$

だから, $x \in (X \setminus A)^i$. すなわち, $x \in X \setminus \overline{A}$. したがって, $X \setminus A \subset X \setminus \overline{A}$ だから, $\overline{A} \subset A$.

一方, $A \subset \overline{A}$ は常になりたつ. 以上より, $\overline{A} = A$. すなわち, A は閉集合. □

それでは, 次を示そう.

定理 コンパクト空間で定義された実数値連続関数は最大値および最小値をもつ.

証明 X をコンパクト空間, f を X で定義された実数値連続関数とする. 3 つめの定理より, $f(X)$ は $\mathbf{R}$ のコンパクト部分集合. $\mathbf{R}$ は距離空間だから, 上の定理より, $f(X)$ は $\mathbf{R}$ の有界閉集合. $f(X)$ の有界性および Weierstrass の定理より, $\sup f(X), \inf f(X) \in \mathbf{R}$. 更に, $f(X)$ が閉集合であることより, $\sup f(X), \inf f(X) \in f(X)$. すなわち, ある $a,b \in X$ が存在し,

$$f(a) = \sup f(X), \quad f(b) = \inf f(X).$$

よって, f は $x=a$ において最大値 $f(a)$ をとり, $x=b$ において最小値 $f(b)$ をとる. したがって, コンパクト空間で定義された実数値連続関数は最大値および最小値をもつ. □

Heine-Borel の被覆定理と上の定理より, 特に, 閉区間で定義された実数値連続関数は最大値および最小値をもつ.

問題 3

1. 余有限位相をもつ位相空間はコンパクトであることを示せ.

2. コンパクト空間の閉集合はコンパクトであることを示せ.

3. 開区間と閉区間は同相ではないことを示せ.

4. X を空でない集合, $\mathfrak{A}$ を X の部分集合系とする. $\mathfrak{A}$ の任意の有限個の元 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に対して, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$ となるとき, $\mathfrak{A}$ は有限交叉性をもつという.

X を位相空間とする. X がコンパクトであることと X の閉集合からなる任意の集合系 $\mathfrak{A}$ が有限交叉性をもつならば, $\bigcap_{A\in\mathfrak{A}} A \neq \emptyset$ となることは同値であることを示せ.

問題 3 の解答

1. X を余有限位相をもつ位相空間, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の開被覆とする. まず, $X \neq \emptyset$ だから, ある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在し, $U_{\lambda_0} \neq \emptyset$. 余有限位相の定義より, $X \setminus U_{\lambda_0}$ は有限集合.

$X \setminus U_{\lambda_0} = \emptyset$ のとき, $X = U_{\lambda_0}$ となるから, (U_{λ_0}) は X の有限部分被覆.

$X \setminus U_{\lambda_0} \neq \emptyset$ のとき,

$$X \setminus U_{\lambda_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

と表しておく. このとき, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は X の被覆だから, ある $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在し, 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $x_i \in U_{\lambda_i}$. よって, $(U_{\lambda_i})_{i=0}^n$ は $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆.

したがって, X はコンパクト.

2. X をコンパクト空間, A を X の閉集合, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を A の開被覆とする. このとき, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \cup (X \setminus A)$ は X の開被覆. ここで, X はコンパクトだから, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \cup (X \setminus A)$ の有限部分被覆が存在する. すなわち, ある $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在し,

$$X = \left(\bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}\right) \cup (X \setminus A).$$

よって, $(U_{\lambda_i})_{i=1}^n$ は A の開被覆 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆. したがって, A はコンパクト. すなわち, コンパクト空間の閉集合はコンパクト.

3. 背理法により示す.

開区間と閉区間が同相であると仮定する. 閉区間を $[a, b]$, 開区間を (c, d) と表しておくと, $[a, b]$ から (c, d) への同相写像 f が存在する. 特に, f は全射.

一方, $[a, b]$ はコンパクトで, f は実数値連続関数となるから, f の最大値 M および最小値 m が存在する. このとき,

$$c < m \leq M < d.$$

これは f が全射であることに矛盾.

よって, 開区間と閉区間は同相ではない.

4. まず, X がコンパクトであると仮定する. $\mathfrak{A}$ を X の閉集合からなる集合系で, $\displaystyle\bigcap_{A\in\mathfrak{A}} A = \emptyset$ となるものとする. このとき, de Morgan の法則より,

$$\begin{aligned} X &= X \setminus \emptyset \\ &= X \setminus \left(\bigcap_{A\in\mathfrak{A}} A\right) \\ &= \bigcup_{A\in\mathfrak{A}} (X \setminus A). \end{aligned}$$

すなわち,

$$X = \bigcup_{A\in\mathfrak{A}} (X \setminus A).$$

更に, $\mathfrak{A}$ の元は X の閉集合だから, $(X \setminus A)_{A\in\mathfrak{A}}$ は X の開被覆. ここで, X はコンパクトだから, $(X \setminus A)_{A\in\mathfrak{A}}$ の有限部分被覆が存在する. すなわち, ある $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ が存在し,

$$X = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus A_i).$$

よって, de Morgan の法則より,

$$\begin{aligned}\emptyset &= X \setminus X \\ &= X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus A_i) \right) \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus (X \setminus A_i)) \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} A_i.\end{aligned}$$

すなわち,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$$

となり, $\mathfrak{A}$ は有限交叉性をもたない. したがって, 対偶を考えると, X の閉集合からなる任意の集合系 $\mathfrak{A}$ が有限交叉性をもつならば, $\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A \neq \emptyset$.

逆に, X の閉集合からなる任意の集合系 $\mathfrak{A}$ が有限交叉性をもつならば, $\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A \neq \emptyset$ となると仮定する. $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を X の開被覆とする. すなわち,

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda.$$

このとき, de Morgan の法則より,

$$\begin{aligned}\emptyset &= X \setminus X \\ &= X \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \right) \\ &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus U_\lambda).\end{aligned}$$

すなわち,

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus U_\lambda) = \emptyset.$$

ここで, 各 U_λ は X の開集合だから, $(X \setminus U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は X の閉集合からなる集合族. よって, 仮定の対偶を考えると, $(X \setminus U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は有限交叉性をもたない. すなわち, ある $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \Lambda$ が存在し,

$$\bigcap_{i=1}^{m} (X \setminus U_{\lambda_i}) = \emptyset.$$

したがって, de Morgan の法則を用いて計算すると,

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda_i}.$$

すなわち, X はコンパクト.