§4. 完備距離空間

距離空間のコンパクト性は点列コンパクト性, 或いは全有界性, 完備性といったものによって特徴付けることができる. また, 完備距離空間はそれ自身とても重要な位相空間である. ここでは, コンパクト距離空間の特徴付けのための準備も兼ねて, 完備距離空間について述べよう.

微分積分において学ぶように, $\mathbf{R}^n$ は完備である. すなわち, $\mathbf{R}^n$ の任意の Cauchy 列は収束する. このような性質は一般の距離空間に対しても考えることができる.

定義 (X, d) を距離空間とする.

$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ を X の点列とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n \geq N$ ならば, $d(a_m, a_n) < \varepsilon$ となるとき, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ を Cauchy 列または基本列という.

X の任意の Cauchy 列が収束するとき, X は完備であるという.

$A \subset X$ とする. A が部分距離空間として完備なとき, A は完備であるという.

Cauchy 列に関して, 次がなりたつ.

定理 距離空間の収束する点列は Cauchy 列である.

証明 (X, d) を距離空間, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ を $a \in X$ に収束する X の点列とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば, $d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. よって, 三角不等式より, $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n \geq N$ ならば,

$$\begin{aligned} d(a_m, a_n) &\leq d(a_m, a) + d(a, a_n) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

すなわち, $d(a_m, a_n) < \varepsilon$ だから, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は Cauchy 列. したがって, 距離空間の収束する点列は Cauchy 列である. □

注意 Cauchy 列が収束するとは限らない. 例えば, 開区間 $(-1, 1)$ の元からなる $\mathbf{R}$ の点列で, 1 に収束するものは, $\mathbf{R}$ の部分距離空間 $(-1, 1)$ の点列としても Cauchy 列ではあるが, 収束はしない.

また, 完備性は位相的性質ではない. 例えば, 開区間 $(-1, 1)$ から $\mathbf{R}$ への写像 f を

$$f(x) = \tan \frac{\pi}{2} x \quad (x \in (-1, 1))$$

により定めると, f は同相写像となる. しかし, $\mathbf{R}$ が完備であるのに対して, 上で述べたことより, $(-1, 1)$ は完備ではない.

以下では, 完備距離空間に関する重要な定理である縮小写像の原理と Baire のカテゴリー定理を紹介しよう. まず, 次の言葉を用意しておこう.

定義 (X, d) を距離空間, f を X から X 自身への写像とする.

$0 < c < 1$ をみたす定数 c が存在し, 任意の $x, y \in X$ に対して,

$$d(f(x), f(y)) \leq c d(x, y) \tag{$*$}$$

となるとき, f を X の縮小写像という.

$f(a) = a$ となる $a \in X$ を f の不動点という.

注意 定義より, 縮小写像は連続であることが容易に分かる.

それでは, 縮小写像の原理を述べよう. 縮小写像の原理は微分積分においては陰関数定理, 或いは逆写像定理, 微分方程式論においては常微分方程式の解の存在と一意性定理を証明する際に用いられる.

縮小写像の原理　完備距離空間の縮小写像は不動点を一意的にもつ.

証明　(X, d) を完備距離空間, f を X の縮小写像とする.

まず, 不動点が存在することを示す. f は縮小写像だから, $0 < c < 1$ をみたす定数 c が存在し, 任意の $x, y \in X$ に対して, $(*)$ がなりたつ. また, $a_1 \in X$ を選んでおき, X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_n = f(a_{n-1}) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

により定める. $n \in \mathbf{N}$ とすると, $(*)$ より,

$$\begin{aligned} d(a_n, a_{n+1}) &= d(f(a_{n-1}), f(a_n)) \\ &\leq cd(a_{n-1}, a_n) \\ &\ \ \vdots \\ &\leq c^{n-1} d(a_1, a_2). \end{aligned}$$

更に, $m \in \mathbf{N}$ とすると, 三角不等式および $0 < c < 1$ であることより,

$$\begin{aligned} d(a_n, a_{n+m}) &\leq d(a_n, a_{n+1}) + d(a_{n+1}, a_{n+2}) + \cdots + d(a_{n+m-1}, a_{n+m}) \\ &\leq (c^{n-1} + c^n + \cdots + c^{n+m-2}) d(a_1, a_2) \\ &= \frac{c^{n-1}(1 - c^m)}{1 - c} d(a_1, a_2) \\ &\leq \frac{c^{n-1}}{1 - c} d(a_1, a_2). \end{aligned}$$

よって, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列となる. ここで, X は完備だから, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある $a \in X$ に収束する. 更に, 縮小写像は連続だから,

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\lim_{n \to \infty} a_n\right) \\ &= \lim_{n \to \infty} f(a_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} a_{n+1} \\ &= a. \end{aligned}$$

したがって, a は f の不動点.

次に, 不動点の一意性を示す. $a, b \in X$ を f の不動点とすると, $(*)$ より,

$$\begin{aligned} d(a, b) &= d(f(a), f(b)) \\ &\leq cd(a, b). \end{aligned}$$

すなわち,

$$(1 - c) d(a, b) \leq 0.$$

$0 < c < 1$ だから, $d(a, b) = 0$. よって, $a = b$.

以上より, 完備距離空間の縮小写像は不動点を一意的にもつ. □

また, 次の Baire のカテゴリー定理は一様有界性の原理や開写像定理といった関数解析学における基本的な定理を示す際に用いられる.

Baire のカテゴリー定理　(X, d) を完備距離空間, $(O_n)_{n\in\mathbf{N}}$ を X の稠密な開集合からなる集合族とすると, $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ は X において稠密.

証明　一般に, A を X の稠密な部分集合とすると, A の外部, すなわち $X \setminus A$ の内部は空であるから, 任意の $x \in X$ および任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$B(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

であることに注意する.

まず, $x \in X$, $\varepsilon > 0$ とする. O_1 は X において稠密だから,

$$B(x;\varepsilon) \cap O_1 \neq \emptyset.$$

更に, O_1 は X の開集合だから, ある $a_1 \in X$ およびある $\varepsilon_1 > 0$ が存在し,

$$\overline{B(a_1;\varepsilon_1)} \subset B(x;\varepsilon) \cap O_1, \quad \varepsilon_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

同様に, ある $a_2 \in X$ およびある $\varepsilon_2 > 0$ が存在し,

$$\overline{B(a_2;\varepsilon_2)} \subset B(a_1;\varepsilon) \cap O_2, \quad \varepsilon_2 \leq \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

以下同様に, この操作を繰り返すと, X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ および実数列 $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在し,

$$\overline{B(a_{n+1};\varepsilon_{n+1})} \subset B(a_n;\varepsilon_n) \cap O_{n+1}, \quad \varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon}{2^n} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

$n, m \in \mathbf{N}$ とすると, $a_{n+m} \in B(a_n;\varepsilon_n)$ だから,

$$\begin{aligned} d(a_n, a_{n+m}) &< \varepsilon_n \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2^n}. \end{aligned}$$

よって, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X の Cauchy 列となる. ここで, X は完備だから, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある $a \in X$ に収束する. このとき,

$$\begin{aligned} a &\in \overline{B(a_n;\varepsilon_n)} \\ &\subset B(x;\varepsilon) \cap \bigcap_{i=1}^{n} O_i. \end{aligned}$$

n は任意だから,

$$a \in B(x;\varepsilon) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n.$$

したがって, $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ は X において稠密. □

問題 4

1. X をコンパクト空間とし, X で定義された実数値連続関数全体の集合を $C(X)$ と表す．このとき, $C(X)$ で定義された実数値関数

$$\| \ \| : C(X) \to \mathbf{R}$$

を

$$\|f\| = \max\{|f(x)| | x \in X\} \quad (f \in C(X))$$

により定めることができる．更に, 組 $(C(X), \| \ \|)$ はノルム空間となり,

$$d(f, g) = \|f - g\| \quad (f, g \in C(X))$$

とおくと, 組 $(C(X), d)$ は距離空間となる．$(C(X), d)$ は完備であることを示せ.

2. 閉区間 $[0, 1]$ で定義された実数値連続関数全体の集合を $C[0, 1]$ と表す．このとき, $C[0, 1]$ で定義された実数値関数

$$\| \ \|_1 : C[0, 1] \to \mathbf{R}$$

を

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx \quad (f \in C[0, 1])$$

により定めると, 組 $(C[0, 1], \| \ \|)$ はノルム空間となり,

$$d_1(f, g) = \|f - g\|_1 \quad (f, g \in C[0, 1])$$

とおくと, 組 $(C[0, 1], d_1)$ は距離空間となる.

$C[0, 1]$ の点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right), \\ (n+1)\left(x - \frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right), \\ 1 & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} < x \le 1\right) \end{cases}$$

により定める．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列であることを示せ．なお, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しないことが分かる．特に, $(C[0, 1], d_1)$ は完備ではない.

3. X を距離空間, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の Cauchy 列とする．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ のある部分列が $a \in X$ に収束するならば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束することを示せ.

4. X を完備距離空間とし, $A \subset X$ とする．A が完備であることと A が X の閉集合であることは同値であることを示せ.

問題 4 の解答

1. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を $C(X)$ の Cauchy 列とする.

まず, $\varepsilon > 0$ とすると, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は $C(X)$ の Cauchy 列だから, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n \geq N$ ならば,

$$d(f_m, f_n) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

よって, $x \in X$, $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n \geq N$ ならば,

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq \|f_m - f_n\| \\ &= d(f_m, f_n) \\ &< \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

すなわち,

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

だから, 実数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ は $\mathbf{R}$ の Cauchy 列. ここで, $\mathbf{R}$ は完備だから, $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ は収束する. したがって, X で定義された実数値関数 f を

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in X)$$

により定めることができる.

次に, (1) において, $m \to \infty$ とすると,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

$a \in X$ とすると, f_n は連続だから, a を含む X のある開集合 O が存在し, $x \in O$ ならば,

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

よって, 三角不等式および (1)〜(3) より, $x \in O$ ならば,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

すなわち,

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

だから, f は a で連続. a は任意だから, $f \in C(X)$.

更に, $x \in X$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ とすると, 三角不等式および (1), (2) より,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \frac{2}{3}\varepsilon. \end{aligned}$$

すなわち,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

よって, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば,

$$\begin{aligned} d(f_n, f) &= \max\{|f_n(x) - f(x)||x \in X\} \\ &< \frac{2}{3}\varepsilon. \end{aligned}$$

すなわち, $d(f_n, f) < \frac{2}{3}\varepsilon$. したがって, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に収束する.
以上より, $(C(X), d)$ は完備.

2. $\varepsilon > 0$ とする. このとき, $\frac{1}{N} < \varepsilon$ となる $N \in \mathbf{N}$ が存在する. $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n \geq N$ とすると, 三角形の面積を計算することにより,

$$\begin{aligned} d_1(f_m, f_n) &= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1}\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}\right) \\ &< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

すなわち, $d_1(f_m, f_n) < \varepsilon$. よって, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列.

3. d を X 上の距離とし, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を a に収束する $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列とする.
まず, $\varepsilon > 0$ とすると, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列だから, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n \geq N$ ならば, $d(a_m, a_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.
また, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は a に収束するから, $n_K \geq N$ となる $K \in \mathbf{N}$ が存在し, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq K$ ならば, $d(a_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$.
よって, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ とすると, 三角不等式より,

$$\begin{aligned} d(a_n, a) &\leq d(a_n, a_{n_K}) + d(a_{n_K}, a) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

すなわち, $d(a_n, a) < \varepsilon$. したがって, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束する.

4. まず, A が X の閉集合ではないと仮定する. このとき, A の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で, $a \in X$ に収束するが, $a \notin A$ となるものが存在する. このとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は A の Cauchy 列であるが, A の収束する点列ではない. よって, A は完備ではない. したがって, 対偶を取ると, A が完備ならば, A は X の閉集合である.
逆に, A が X の閉集合であると仮定する. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を A の Cauchy 列とする. X は完備だから, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある $a \in X$ に収束する. ここで, A は X の閉集合だから, $a \in A$. よって, A の Cauchy 列は収束する. したがって, A は完備.