§5. コンパクト距離空間

ここでは, §4 の最初に触れた距離空間のコンパクト性の特徴付けについて述べよう. まず, 位相空間に対する点列コンパクト性と距離空間に対する全有界性を定めよう.

定義　X を位相空間とする. X の任意の点列が収束する部分列をもつとき, X は点列コンパクトであるという.

X を距離空間とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ε 近傍からなる X の有限被覆が存在するとき, X は全有界であるという.

全有界距離空間に関して, 次がなりたつ.

定理　(X, d) を全有界距離空間とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) X は第二可算公理をみたす.
(2) X の任意の点列は Cauchy 列を部分列にもつ.

証明　(1): X は距離空間だから, X が可分であることを示せばよい.

仮定より, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, X のある有限部分集合 A_n が存在し,

$$X = \bigcup_{a \in A_n} B\left(a; \frac{1}{n}\right). \qquad (*)$$

ここで, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおくと, A は高々可算. また, $x \in X$, $\varepsilon > 0$ とする. このとき, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ となる $n \in \mathbf{N}$ が存在する. $(*)$ より, ある $a \in A_n$ が存在し, $x \in B\left(a; \frac{1}{n}\right)$. よって, $a \in B(x; \varepsilon)$ となる. したがって,

$$a \in B(x; \varepsilon) \cap A$$

だから, A は X において稠密. 以上より, X は可分.
(2): $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の点列とする.

まず, $(*)$ において, $n = 2$ のときを考えると, ある $a_1 \in A_2$ が存在し,

$$N_1 = \left\{ n \in \mathbf{N} \,\middle|\, x_n \in B\left(a_1; \frac{1}{2}\right) \right\}$$

とおくと, N_1 は無限集合. ここで, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\left\{x_n^{(1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$\left\{ x_n^{(1)} \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\} = \{x_n | n \in N_1\}$$

となるように定める. 次に, $(*)$ において, $n = 4$ のときを考えると, ある $a_2 \in A_4$ が存在し,

$$N_2 = \left\{ n \in \mathbf{N} \,\middle|\, x_n^{(1)} \in B\left(a_2; \frac{1}{4}\right) \right\}$$

とおくと, N_2 は無限集合. ここで, $\left\{x_n^{(1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\left\{x_n^{(2)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$\left\{ x_n^{(2)} \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\} = \left\{ x_n^{(1)} \,\middle|\, n \in N_2 \right\}$$

となるように定める. 以下同様に, この操作を繰り返し, $k = 2, 3, \ldots$ に対して, $\left\{x_n^{(k-1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ まで定められたとき, $(*)$ において, $n = 2k$ のときを考えると, ある $a_k \in A_{2k}$ が存在し,

$$N_k = \left\{ n \in \mathbf{N} \,\middle|\, x_n^{(k-1)} \in B\left(a_k; \frac{1}{2k}\right) \right\}$$

とおくと, N_k は無限集合. ここで, $\left\{x_n^{(k-1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\left\{x_n^{(k)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$\left\{x_n^{(k)} \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\} = \left\{x_n^{(k-1)} \,\middle|\, n \in N_k\right\}$$

となるように定める.

このとき, $m, n \in \mathbf{N}$ とすると, 三角不等式より,

$$d\left(x_m^{(k)}, x_n^{(k)}\right) < \frac{1}{k}.$$

よって, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\left\{x_k^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ を考えると, $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n \geq k$ のとき,

$$d\left(x_m^{(m)}, x_n^{(n)}\right) < \frac{1}{k}.$$

したがって, $\left\{x_k^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ は Cauchy 列となる. □

それでは, 次を示そう.

定理 X を距離空間とする. このとき, 次の (1)〜(3) は同値.

(1) X はコンパクト.
(2) X は点列コンパクト.
(3) X は全有界かつ完備.

証明 (1) $\Rightarrow$ (2): 問題 3 において扱ったように, コンパクト空間の閉集合からなる集合族が有限交叉性をもつならば, それらの共通部分は空ではないことに注意する.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の点列とする. $n \in \mathbf{N}$ に対して, $A_n \subset X$ を

$$A_n = \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$$

により定める. このとき, $\left(\overline{A_n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ は X の閉集合からなる集合族で, 有限交叉性をもつ. ここで, X はコンパクトだから, $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$ が存在する. $k \in \mathbf{N}$ とすると, $a \in \overline{A_k}$ だから, $d(a_{n_k}, a) < \frac{1}{k}$ となる $a_{n_k} \in A_k$ が存在する. 更に, n_k を $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列となるように選ぶことができる. このとき, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は a に収束する. よって, X は点列コンパクト.

(2) $\Rightarrow$ (3): まず, X が全有界であることを背理法により示す. X が全有界ではないと仮定する. このとき, ある $\varepsilon > 0$ が存在し, ε 近傍からなる X の有限被覆は存在しない. よって, $a_1 \in X$ を選んでおくと, ある $a_2 \in X \setminus B(a_1; \varepsilon)$ が存在する. 更に,

$$a_3 \in X \setminus (B(a_1; \varepsilon) \cup B(a_2; \varepsilon))$$

が存在する. 以下同様に, この操作を繰り返すと, $n = 2, 3, \dots$ に対して, $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ まで定められたとき,

$$a_n \in X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} B(a_i; \varepsilon)\right)$$

が存在する. このとき, $m, n \in \mathbf{N}$, $m \neq n$ ならば, $d(a_m, a_n) \geq \varepsilon$ だから, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する部分列をもたない. これは矛盾. したがって, X は全有界.

次に, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ を X の Cauchy 列とする. 仮定より, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ はある $x \in X$ に収束する部分列をもつ. このとき, 問題 4 において扱ったように, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は x に収束する. よって, X は完備.
(3) ⇒ (1): $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の開被覆とする. X は全有界だから, 上の定理の (1) より, 高々可算個の元からなる X の位相の基底 $\mathfrak{B}$ が存在する. このとき, $\lambda \in \Lambda$ に対して, $U \subset O_\lambda$ となる $U \in \mathfrak{B}$ 全体の集合は高々可算. このような U 全体を改めて $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ と表すと, $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は X の開被覆.

ここで,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i \tag{$**$}$$

となる $n \in \mathbf{N}$ が存在することを背理法により示す. $(**)$ をみたす $n \in \mathbf{N}$ が存在しないと仮定する. このとき, X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ で, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$a_n \notin \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

となるものが存在する. X は全有界だから, 上の定理の (2) より, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ で Cauchy 列となるものが存在する. 更に, X は完備だから, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ はある $a \in X$ に収束する. $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は X の開被覆だから, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $a \in U_N$. また, ある $K \in \mathbf{N}$ が存在し, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq K$ ならば, $a_{n_k} \in U_N$. 一方, $K' = \max\{N, K\}$ とおくと,

$$a_{n_{K'}} \notin \bigcup_{i=1}^{n_{K'}} U_i$$

だから, $a_{n_{K'}} \notin U_N$. これは矛盾. よって, $(**)$ をみたす $n \in \mathbf{N}$ が存在する.

$(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ の定義より, 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $U_i \subset O_{\lambda_i}$ となる $\lambda_i \in \Lambda$ が存在するから, $(**)$ より, $(O_{\lambda_i})_{i=1}^n$ は $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆. したがって, X はコンパクト. □

注意 上の定理の (2) ⇒ (3) の証明より, 距離空間 X の任意の点列が Cauchy 列を部分列にもつならば, X は全有界であることが分かる.

上の定理の (1) と (2) の同値性を用いることにより, 次を示すことができる.

定理 $\mathbf{R}^n$ のコンパクト部分集合は有界閉集合に限る.

証明 $\mathbf{R}^n$ は距離空間だから, §3 において示したことより, $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合がコンパクトであることを示せばよい.

A を $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ を A の点列とする. A は有界だから, ある閉区間 $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $\ldots$, $[a_n, b_n]$ が存在し,

$$A \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

となる. Heine-Borel の被覆定理より, $[a_1, b_1]$ はコンパクトだから, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列 $\left\{x_n^{(1)}\right\}_{n=1}^\infty$ で, 第 1 成分が収束するものが存在する. 更に, $[a_2, b_2]$ はコンパクトだから, $\left\{x_n^{(1)}\right\}_{n=1}^\infty$ の部分列 $\left\{x_n^{(2)}\right\}_{n=1}^\infty$ で, 第 2 成分が収束するものが存在する. 以下同様に, この操作を繰り返すと, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ の収束する部分列が存在する. ここで, A は閉集合だから, この部分列の極限は A の元. よって, A は点列コンパクト. したがって, 上の定理より, A はコンパクト. □

注意 $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合がコンパクトであるという事実も Heine-Borel の被覆定理という. また, $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合が点列コンパクトであるという事実を Bolzano-Weierstrass の定理という.

問題 5

1. (X, d) を距離空間とする.

(1) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ を X の有界部分集合とすると, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ は有界であることを示せ.

(2) X が全有界ならば, X は有界であることを示せ. 特に, $\mathbf{R}^n$ は全有界ではないことが分かる.

(3) $A \subset X$ とすると, $\delta(A) = \delta\left(\overline{A}\right)$ であることを示せ.

(4) $\mathbf{R}^n$ の有界部分集合は全有界であることを示せ. 特に, 全有界性は位相的性質ではないことが分かる.

2. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする.

f を X から Y への写像とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在し, $x, x' \in X$, $d_X(x, x') < \delta$ ならば, $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ となるとき, f は一様連続であるという. また, f が全単射で, f および f^{-1} が一様連続なとき, f を一様同相写像という.

X から Y への一様同相写像が存在するとき, X と Y は一様同相であるという. また, 一様同相な距離空間に対して不変な性質を一様位相的性質という.

(1) 完備性は一様位相的性質であることを示せ.

(2) 全有界性は一様位相的性質であることを示せ.

3. $p \geq 1$ とし, 集合 l^p を

$$l^p = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \,\middle|\, \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \text{ となる実数列} \right\}$$

により定める. $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$ とする. このとき, 実数列 $x + y$ を

$$x + y = \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$$

により定めると, $x + y \in l^p$ となることが分かる. また, $c \in \mathbf{R}$ とし, 実数列 cx を

$$cx = \{cx_n\}_{n=1}^{\infty}$$

により定めると, $cx \in l^p$ となる. よって, l^p は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間となる. 更に, l^p で定義された実数値関数

$$\| \ \|_p : l^p \to \mathbf{R}$$

を

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

により定めると, 組 $(l^p, \| \ \|_p)$ はノルム空間となり,

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p$$

とおくと, 組 (l^p, d_p) は完備距離空間となることが分かる. 特に, (l^2, d_2) を Hilbert 空間という. また, 一般に, 完備なノルム空間を Banach 空間という. (l^p, d_p) の有界閉集合はコンパクトであるとは限らないことを示せ.

問題 5 の解答

1. (1) まず, 各 $i=1,2,\ldots,n$ に対して, $a_i \in A_i$ を選んでおく. A_i は有界だから, ある $\varepsilon_i > 0$ が存在し, $A_i \subset B(a_i;\varepsilon_i)$. ここで, $x \in A_i$, $y \in A_j$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$ とすると, 三角不等式より,

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,a_i)+d(a_i,a_j)+d(a_j,y) \\ &< \varepsilon_i + d(a_i,a_j) + \varepsilon_j \\ &\leq 2\max\{\varepsilon_i | 1 \leq i \leq n\} + \max\{d(a_i,a_j) | 1 \leq i,j \leq n\}. \end{aligned}$$

すなわち,

$$d(x,y) < 2\max\{\varepsilon_i | 1 \leq i \leq n\} + \max\{d(a_i,a_j) | 1 \leq i,j \leq n\}.$$

よって,

$$\delta\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq 2\max\{\varepsilon_i | 1 \leq i \leq n\} + \max\{d(a_i,a_j) | 1 \leq i,j \leq n\}.$$

したがって, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ は有界.

(2) X は全有界だから, $\varepsilon > 0$ とすると, ある $a_1, a_2, \ldots, a_n \in X$ が存在し,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i;\varepsilon).$$

ここで, 各 $B(a_i;\varepsilon)$ は有界だから, (1) より, X は有界.

(3) まず, $\delta(A) = +\infty$ のとき, 明らかに,

$$\delta(A) = \delta\left(\overline{A}\right) = +\infty.$$

次に, $\delta(A) \in \mathbf{R}$ のとき, $A \subset \overline{A}$ だから, δ の定義より, $\delta(A) \leq \delta\left(\overline{A}\right)$. また, $x, y \in \overline{A}$, $\varepsilon > 0$ とすると, ある $a, b \in A$ が存在し,

$$d(x,a), d(y,b) < \varepsilon.$$

三角不等式より,

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,a)+d(a,b)+d(b,y) \\ &< \varepsilon + \delta(A) + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon + \delta(A). \end{aligned}$$

すなわち,

$$d(x,y) < 2\varepsilon + \delta(A).$$

よって,

$$\delta(\overline{A}) \leq 2\varepsilon + \delta(A).$$

ε は任意だから, $\delta\left(\overline{A}\right) \leq \delta(A)$. したがって, $\delta(A) = \delta\left(\overline{A}\right)$.

以上より, $\delta(A) = \delta\left(\overline{A}\right)$.

(4) A を $\mathbf{R}^n$ の有界部分集合とする. このとき, (3) より, $\overline{A}$ は $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合, すなわちコンパクト. よって, $\overline{A}$ は全有界. $A \subset \overline{A}$ だから, A は全有界.

2. (1) (X, d_X) を完備距離空間, (Y, d_Y) を距離空間, f を X から Y への一様同相写像, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ を Y の Cauchy 列とする.

まず, $\varepsilon > 0$ とすると, f は X から Y への一様同相写像だから, ある $\delta_X > 0$ が存在し, $x, x' \in X$, $d_X(x, x') < \delta_X$ ならば, $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$. また, f^{-1} は Y から X への一様同相写像だから, ある $\delta_Y > 0$ が存在し, $y, y' \in Y$, $d_Y(y, y') < \delta_Y$ ならば, $d_X(f^{-1}(y), f^{-1}(y'))$ $< \varepsilon$.

$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は Y の Cauchy 列だから, ある $N_1 \in \mathbf{N}$ が存在し, $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n \geq N_1$ ならば, $d_Y(a_m, a_n) < \delta_Y$. よって, $d_X(f^{-1}(a_m), f^{-1}(a_n)) < \varepsilon$. すなわち, $\{f^{-1}(a_n)\}_{n=1}^\infty$ は X の Cauchy 列. ここで, X は完備で f は全単射だから, ある $a \in Y$ が存在し, $\{f^{-1}(a_n)\}_{n=1}^\infty$ は $f^{-1}(a) \in X$ に収束する. すなわち, ある $N_2 \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N_2$ ならば, $d_X(f^{-1}(a_n), f^{-1}(a)) < \delta_X$. したがって, $d_Y(a_n, a) < \varepsilon$. すなわち, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は a に収束するから, Y は完備.

以上より, 完備性は一様位相的性質である.

(2) (X, d_X) を全有界距離空間, (Y, d_Y) を距離空間, f を X から Y への一様同相写像とする.

まず, $\varepsilon > 0$ とすると, f は X から Y への一様同相写像だから, ある $\delta > 0$ が存在し, $x, x' \in X$, $d_X(x, x') < \delta$ ならば, $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

ここで, X は全有界だから, ある $a_1, a_2, \ldots, a_n \in X$ が存在し,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B_X(a_i; \delta).$$

このとき,

$$f(B_X(a_i; \delta)) \subset B_Y(f(a_i); \varepsilon).$$

f は全単射だから,

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} B_Y(f(a_i); \varepsilon).$$

よって, Y は全有界.

したがって, 全有界性は一様位相的性質である.

3. $A \subset l^p$ を

$$A = \{x \in l^p \mid \|x\|_p = 1\}$$

により定める. このとき, A は l^p の有界閉集合. ここで, A の点列 $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ を

$$a_k = \left\{x_n^{(k)}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad x_k^{(k)} = 1, \quad x_n^{(k)} = 0 \quad (n \neq k)$$

により定める. $k, l \in \mathbf{N}$, $k \neq l$ とすると,

$$\begin{aligned} d_p(a_k, a_l) &= (1^p + 1^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

すなわち, $d_p(a_k, a_l) = 2^{\frac{1}{p}}$. よって, $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ は収束する部分列をもたないから, A は点列コンパクトではない. A は l^p の部分距離空間だから, コンパクトではない. したがって, (l^p, d_p) の有界閉集合はコンパクトであるとは限らない.