§6. Tychonoff の定理

問題 1 において扱ったように, 位相空間の族に対して, それらの各々が連結であることとそれらの積空間が連結であることは同値であった. ここでは, コンパクト性について, 同様のことを考えよう. まず, 積空間から直積因子への射影は連続だから, 積空間がコンパクトならば, 各々の直積因子はコンパクトである. 逆についても正しいことは Tychonoff の定理として知られている.

Tychonoff の定理 コンパクト空間の族の積空間はコンパクト.

証明 有限個の直積の場合にのみ示す.

まず, 2 個の直積の場合を考える. X, Y をコンパクト空間, $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $X\times Y$ の開被覆とする. $\lambda\in\Lambda$ とすると, 積位相の定義より, X の開集合からなる集合族 $(U_\mu)_{\mu\in M_\lambda}$ および Y の開集合からなる集合族 $(V_\mu)_{\mu\in M_\lambda}$ が存在し,

$$O_\lambda=\bigcup_{\mu\in M_\lambda}(U_\mu\times V_\mu).$$

ここで,

$$M=\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda$$

とおくと, $(U_\mu\times V_\mu)_{\mu\in M}$ は $X\times Y$ の開被覆. よって, $(U_\mu\times V_\mu)_{\mu\in M}$ が有限部分被覆をもつことを示せばよい.

$x\in X$ とする. このとき, $\mu\in M$ に対して,

$$(\{x\}\times Y)\cap(U_\mu\times V_\mu)=(U_\mu\cap\{x\})\times V_\mu$$

だから, $((U_\mu\cap\{x\})\times V_\mu)_{\mu\in M}$ は $X\times Y$ の部分空間 $\{x\}\times Y$ の開被覆. ここで, Y から $\{x\}\times Y$ への写像 ι_x を

$$\iota_x(y)=(x,y)\quad(y\in Y)$$

により定めると, ι_x は同相写像. Y はコンパクトだから, コンパクト性の位相的性質より, $\{x\}\times Y$ はコンパクト. よって, $((U_\mu\cap\{x\})\times V_\mu)_{\mu\in M}$ の有限部分被覆 $((U_{x,i}\cap\{x\})\times V_{x,i})_{i=1}^{n_x}$ で, 各 $i=1,2,\dots,n_x$ に対して,

$$U_{x,i}\cap\{x\}\neq\emptyset$$

となるものが存在する.

更に,

$$U'_x=\bigcap_{i=1}^{n_x}U_{x,i}$$

とおくと, $(U'_x)_{x\in X}$ は X の開被覆. ここで, X はコンパクトだから, $(U'_x)_{x\in X}$ の有限部分被覆 $(U'_{x_j})_{j=1}^{n}$ が存在する. したがって, $(x,y)\in X\times Y$ とすると, (x,y) はある $U_{x_j,i}\times V_{x_j,i}$ の元となるから, $U_{x_j,i}\times V_{x_j,i}$ 全体からなる集合族は $(U_\mu\times V_\mu)_{\mu\in M}$ の有限部分被覆. 以上より, $X\times Y$ はコンパクト.

有限個の直積の場合は, 積空間の個数に関する数学的帰納法を用いればよい. □

Tychonoff の定理は選択公理ととても関係が深い. まず, 一般の場合に Tychonoff の定理を証明するには, 選択公理とそれと同値な次の Zorn の補題を必要とする.

Zorn の補題 任意の全順序部分集合が上界をもつような順序集合は極大元をもつ.

そして, 実は次がなりたつ.

定理 Tychonoff の定理と選択公理は同値.

証明 Tychonoff の定理から選択公理を導く.
$(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を空でない集合からなる集合族とする. どの X_λ の元でもない ω を選んでおき,

$$Y_\lambda = X_\lambda \cup \{\omega\}$$

とおく. このとき, $\lambda \in \Lambda$ に対して, ω を λ 成分とする $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の選択関数が存在するから, $Y = \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ とおくと, $Y \neq \emptyset$.

各 $\lambda \in \Lambda$ に対して, Y_λ の部分集合族 $\mathfrak{O}_\lambda$ を

$$\mathfrak{O}_\lambda = \{O \subset Y_\lambda | Y_\lambda \setminus O \text{ は有限集合 }\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\{\omega\}\}$$

により定める. このとき, 余有限位相の場合と同様に, $\mathfrak{O}_\lambda$ は Y_λ の位相となる.

位相空間 $(Y_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ がコンパクトであることを示す. $\mathfrak{A}$ を Y_λ の閉集合からなる集合系で, 有限交叉性をもつものとする. このとき, $\bigcap_{A\in\mathfrak{A}} \mathfrak{A} \neq \emptyset$ となることを背理法により示す. $\bigcap_{A\in\mathfrak{A}} \mathfrak{A} = \emptyset$ であると仮定する. $A \in \mathfrak{A}$ とすると, A は Y_λ の閉集合だから, $\mathfrak{O}_\lambda$ の定義より, $A = X_\lambda, Y_\lambda$ または A は有限集合. $\mathfrak{A}$ の任意の元が X_λ または Y_λ のとき, $X_\lambda \neq \emptyset$ だから, ある $x_\lambda \in X_\lambda$ が存在する. このとき, $x_\lambda \in \bigcap_{A\in\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$ だから, 矛盾. 有限集合 $A \in \mathfrak{A}$ が存在するとき, $A = \emptyset$ ならば, $\mathfrak{A}$ は有限交叉性をもたないから, $A \neq \emptyset$. このとき,

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

と表しておくと, 仮定より, 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $a_i \notin A_i$ となる $A_i \in \mathfrak{A}$ が存在する. よって,

$$A \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset.$$

これは $\mathfrak{A}$ が有限交叉性をもつことに矛盾. したがって, $\bigcap_{A\in\mathfrak{A}} \mathfrak{A} \neq \emptyset$. 以上より, $(Y_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda)$ はコンパクト.

各 Y_λ はコンパクトだから, Tychonoff の定理より, 積空間 Y はコンパクト. p_λ を Y から Y_λ への射影とし, $B_\lambda = p_\lambda^{-1}(X_\lambda)$ とおく. X_λ は Y_λ の閉集合で, p_λ は連続だから, B_λ は Y の閉集合. ここで, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \Lambda$ とし, 各 $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して, $x_{\lambda_i} \in X_{\lambda_i}$ を選んでおく. このとき,

$$f(\lambda) = \begin{cases} x_{\lambda_i} & (\lambda = \lambda_i,\ i = 1, 2, \ldots, m), \\ \omega & (\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \end{cases}$$

とおくと, $f \in \bigcap_{i=1}^{m} B_{\lambda_i}$. よって, $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は有限交叉性をもつ. したがって, Y のコンパクト性より, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \neq \emptyset$. 一方, B_λ の定義より, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = \prod_\lambda X_\lambda$. 以上より, $\prod_\lambda X_\lambda \neq \emptyset$ だから, 選択公理がなりたつ. □

例 §5 において, $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合はコンパクトであることを述べたが, 同じことを Tychonoff の定理を用いて示そう.

A を $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合とする．A は有界だから，ある閉区間 $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $\ldots$, $[a_n, b_n]$ が存在し，

$$A \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

となる．Heine-Borel の被覆定理より，各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，$[a_i, b_i]$ はコンパクト．よって，Tychonoff の定理より，上の式の閉区間の n 個の積はコンパクト．ここで，A は $\mathbf{R}^n$ の閉集合で，問題 3 において扱ったように，コンパクト空間の閉集合はコンパクトだから，A はコンパクト．

例 (Cantor 集合)

0 と 1 からなる離散空間 $\{0, 1\}$ の可算無限個の積空間を $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ と表し，Cantor 集合という．$\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ は一般項が 0 または 1 の値をとる数列全体の集合，すなわち，

$$\{0, 1\}^{\mathbf{N}} = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \middle| \, x_n = 0, 1 \right\}$$

とみなすこともできる．また，$\{0, 1\}$ はコンパクトだから，Tychonoff の定理より，$\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ はコンパクトである．

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ および $k \in \mathbf{N}$ に対して，$U\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, k\right) \subset \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ を

$$U\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, k\right) = \left\{ \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \, \middle| x_n = y_n \ (n = 1, 2, \ldots, k) \right\}$$

により定める．このとき，$\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ の部分集合系 $\mathfrak{B}$ を

$$\mathfrak{B} = \left\{ U\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, k\right) \middle| \, \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \{0, 1\}^{\mathbf{N}}, \ k \in \mathbf{N} \right\}$$

により定めると，離散位相および積位相の定義より，$\mathfrak{B}$ は $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ の積位相の基底である．

ここで，$\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ から $\mathbf{R}$ への写像 f を

$$f\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} x_n \qquad \left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \{0, 1\}^{\mathbf{N}}\right)$$

により定める．$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$, $k \in \mathbf{N}$ とすると，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in U\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, k+1\right)$ のとき，

$$\begin{aligned}
\left| f\left(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) - f\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} y_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} x_n \right| \\
&= \left| \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{2}{3^n} (y_n - x_n) \right| \\
&\leq \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{2}{3^n} \\
&= \frac{2}{3^{k+2}} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \\
&< \frac{1}{3^k}.
\end{aligned}$$

よって，

$$f\left(U\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, k+1\right)\right) \subset B\left(f\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right); \frac{1}{3^k} \right)$$

だから，f は連続．更に計算すると，f は $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ から $f\left(\{0, 1\}^{\mathbf{N}}\right)$ への同相写像となることがわかる．$f\left(\{0, 1\}^{\mathbf{N}}\right)$ も Cantor 集合という．

問題 6

1. $((X_n, d_n))_{n\in\mathbf{N}}$ を可算個の距離空間の族とする．各 $n \in \mathbf{N}$ に対して，$X_n \times X_n$ で定義された実数値関数

$$d'_n : X \times X \to \mathbf{R}$$

を

$$d'_n(x, y) = \min\{1, d_n(x, y)\} \quad ((x, y) \in X_n \times X_n)$$

により定めると，d'_n は d_n と同じ位相を定める X_n 上の距離となる．このとき，$X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ とおき，$X \times X$ で定義された実数値関数

$$d : X \times X \to \mathbf{R}$$

を

$$d\left((x_n)_{n\in\mathbf{N}}, (y_n)_{n\in\mathbf{N}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d'_n(x_n, y_n) \quad ((x_n)_{n\in\mathbf{N}}, (y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in X)$$

により定める．

(1) d は X 上の距離となることを示せ．

(2) $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} = \{(a_{k,n})_{n\in\mathbf{N}}\}_{k=1}^{\infty}$ を X の点列とし，$\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}} \in X$ とする．$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ が α に収束することと各 $n \in \mathbf{N}$ に対して，X_n の点列 $\{a_{k,n}\}_{k=1}^{\infty}$ が α_n に収束することは同値であることを示せ．

(3) 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して，X_n がコンパクトならば，X はコンパクトであることを Tychonoff の定理を用いずに示せ．

問題 6 の解答

1. (1) $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}, (y_n)_{n\in\mathbf{N}}, (z_n)_{n\in\mathbf{N}} \in X$ とする.

まず, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, d'_n は X_n 上の距離だから, 距離の正値性より, $d'_n(x_n, y_n) \geq 0$. よって, d の定義より, $d\left((x_n)_{n\in\mathbf{N}}, (y_n)_{n\in\mathbf{N}}\right) \geq 0$. また, $d\left((x_n)_{n\in\mathbf{N}}, (y_n)_{n\in\mathbf{N}}\right) = 0$ となるのは各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, $d'_n(x_n, y_n) = 0$ となるとき, すなわち, $x_n = y_n$ より, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} = (y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ となるとき. したがって, d は正値性をみたす.

次に, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, d'_n は X_n 上の距離だから, 距離の対称性より,

$$d'_n(x_n, y_n) = d'_n(y_n, x_n).$$

よって,

$$\begin{aligned} d\left((x_n)_{n\in\mathbf{N}}, (y_n)_{n\in\mathbf{N}}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d'_n(x_n, y_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d'_n(y_n, x_n) \\ &= d\left((y_n)_{n\in\mathbf{N}}, (x_n)_{n\in\mathbf{N}}\right). \end{aligned}$$

すなわち,

$$d\left((x_n)_{n\in\mathbf{N}}, (y_n)_{n\in\mathbf{N}}\right) = d\left((y_n)_{n\in\mathbf{N}}, (x_n)_{n\in\mathbf{N}}\right).$$

したがって, d は対称性をみたす.

更に, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, d'_n は X_n 上の距離だから, 三角不等式より,

$$d'_n(x_n, z_n) \leq d'_n(x_n, y_n) + d'_n(y_n, z_n).$$

よって,

$$\begin{aligned} d\left((x_n)_{n\in\mathbf{N}}, (z_n)_{n\in\mathbf{N}}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d'_n(x_n, z_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(d'_n(x_n, y_n) + d'_n(y_n, z_n)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d'_n(x_n, y_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d'_n(y_n, z_n) \\ &= d\left((x_n)_{n\in\mathbf{N}}, (y_n)_{n\in\mathbf{N}}\right) + d\left((y_n)_{n\in\mathbf{N}}, (z_n)_{n\in\mathbf{N}}\right). \end{aligned}$$

すなわち,

$$d\left((x_n)_{n\in\mathbf{N}}, (z_n)_{n\in\mathbf{N}}\right) \leq d\left((x_n)_{n\in\mathbf{N}}, (y_n)_{n\in\mathbf{N}}\right) + d\left((y_n)_{n\in\mathbf{N}}, (z_n)_{n\in\mathbf{N}}\right).$$

したがって, d は三角不等式をみたす.

以上より, d は X 上の距離.

(2) まず, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ が α に収束すると仮定する. このとき, $n \in \mathbf{N}$ とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $K \in \mathbf{N}$ が存在し, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq K$ ならば, $d(a_k, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. よって, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq K$ ならば,

$$\begin{aligned} d'_n(a_{k,n}, \alpha_n) &\leq 2^n d(a_k, \alpha) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

すなわち, $d'_n(a_{k,n}, \alpha_n) < \varepsilon$. よって, $\{a_{k,n}\}_{k=1}^{\infty}$ は α_n に収束する.

逆に, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, $\{a_{k,n}\}_{k=1}^{\infty}$ が α_n に収束すると仮定する. $\varepsilon > 0$ とすると, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$. $n = 1, 2, \ldots, N$ とすると, $\{a_{k,n}\}_{k=1}^{\infty}$ は α_n に収束するから, ある $K_n \in \mathbf{N}$ が存在し, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq K_n$ ならば, $d'_n(a_{k,n}, \alpha_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. よって,

$$K = \max\{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$$

とおくと, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq K$ ならば,

$$\begin{aligned} d(a_k, \alpha) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} d'_n(a_{k,n}, \alpha_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d'_n(a_{k,n}, \alpha_n) \\ &< \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^N} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

すなわち, $d(a_k, \alpha) < \varepsilon$. したがって, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は α に収束する.

(3) まず, 距離空間に対しては, コンパクト性と点列コンパクト性は同値であることに注意する.

$\{a_k\}_{k=1}^{\infty} = \{(a_{k,n})_{n \in \mathbf{N}}\}_{k=1}^{\infty}$ を X の点列とする. まず, X_1 はコンパクトだから, X_1 の点列 $\{a_{k,1}\}_{k=1}^{\infty}$ は収束する部分列 $\{a_{k_l,1}\}_{l=1}^{\infty}$ をもつ. そこで, X の点列 $\{a_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ を

$$\{a_{k_l}\}_{l=1}^{\infty} = \left\{a_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\left(a_{k,n}^{(1)}\right)_{n \in \mathbf{N}}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

とおく. 次に, X_2 はコンパクトだから, X_2 の点列 $\left\{a_{k,2}^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ は収束する部分列 $\left\{a_{k_l,2}^{(1)}\right\}_{l=1}^{\infty}$ をもつ. そこで, X の点列 $\left\{a_{k_l}^{(1)}\right\}_{l=1}^{\infty}$ を

$$\left\{a_{k_l}^{(1)}\right\}_{l=1}^{\infty} = \left\{a_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\left(a_{k,n}^{(2)}\right)_{n \in \mathbf{N}}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

とおく. 以下同様に, この操作を繰り返し, $m = 1, 2, \ldots$ に対して, X の点列 $\left\{a_k^{(m)}\right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\left(a_{k,n}^{(m)}\right)_{n \in \mathbf{N}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ が定められたとき, X_{m+1} はコンパクトだから, X_{m+1} の点列 $\left\{a_{k,m+1}^{(m)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ は収束する部分列 $\left\{a_{k_l,m+1}^{(m)}\right\}_{l=1}^{\infty}$ をもつ. そこで, X の点列 $\left\{a_{k_l}^{(m)}\right\}_{l=1}^{\infty}$ を

$$\left\{a_{k_l}^{(m)}\right\}_{l=1}^{\infty} = \left\{a_k^{(m+1)}\right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\left(a_{k,n}^{(m+1)}\right)_{n \in \mathbf{N}}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

とおく. このとき, X の点列 $\left\{a_m^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty} = \left\{\left(a_{m,n}^{(m)}\right)_{n \in \mathbf{N}}\right\}_{m=1}^{\infty}$ は $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ の部分列で, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, X_n の点列 $\left\{a_{m,n}^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$ は収束する. よって, (2) より, $\left\{a_m^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$ は収束する. したがって, X は点列コンパクトだから, コンパクト.