§7. Hausdorff 空間

距離空間の点列の極限は一意的であるが, 一般の位相空間の場合はそうとは限らない. しかし, 一般の位相空間に対しても, 次のような条件を付け加えることにより, 点列の極限は一意的となる.

定義 X を位相空間とする.

$x, y \in X$ を異なる 2 点とする. X の開集合 O_x, O_y で,

$$x \in O_x, \quad y \in O_y, \quad O_x \cap O_y = \emptyset \tag{$*$}$$

となるものが存在するとき, x と y は開集合により分離されるという.

X の任意の異なる 2 点が開集合により分離されるとき, X は Hausdorff であるという. このとき, X は Hausdorff の分離公理または第二分離公理をみたすという. Hausdorff な位相空間を Hausdorff 空間または T_2 空間という.

注意 定義より, Hausdorff 性は位相的性質である.

また, 上の定義では開集合を用いて 2 点を分離することを考えたが, 開集合の代わりに近傍を用いてもよい.

始めに述べたことを示しておこう.

定理 Hausdroff 空間の点列が収束するならば, その極限は一意的.

証明 背理法により示す.

X を Hausdorff 空間, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ を X の収束する点列とし, $a, b \in X$ が $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の異なる極限であると仮定する. まず, X は Hausdorff だから,

$$a \in O_a, \quad b \in O_b, \quad O_a \cap O_b = \emptyset$$

となる X の開集合 O_a, O_b が存在する.

ここで, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は a に収束するから, ある $N_a \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N_a$ ならば, $a_n \in O_a$. また, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は b にも収束するから, ある $N_b \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N_b$ ならば, $a_n \in O_b$. よって,

$$a_{\max\{N_a, N_b\}} \in O_a \cap O_b.$$

これは矛盾. よって, $a = b$. すなわち, Hausdroff 空間の点列が収束するならば, その極限は一意的. □

Hausdorff 空間の例について考えよう.

例 距離空間は Hausdorff である. 実際, 距離空間 (X, d) の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して, $\varepsilon = d(x, y)$ とおくと, $\varepsilon > 0$ で,

$$x \in B\left(x; \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad y \in B\left(y; \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad B\left(x; \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(y; \frac{\varepsilon}{2}\right) = \emptyset$$

となり, x と y は開集合により分離される.

例 離散空間は Hausdorff である. 実際, 離散空間 X の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して, $\{x\}$, $\{y\}$ は X の開集合で,

$$x \in \{x\}, \quad y \in \{y\}, \quad \{x\} \cap \{y\} = \emptyset$$

となり, x と y は開集合により分離される.

例　2 点以上からなる密着空間は Hausdorff ではない．実際，X を 2 点 x, y を含む密着空間とすると，x を含む X の開集合も y を含む X の開集合も X のみであるから，x と y を開集合により分離することはできない．

例　X を空でない集合とし，X の余有限位相を考える．

X が有限集合のとき，X は離散空間である．よって，上の 2 つめの例より，X は Hausdorff である．

X が無限集合のとき，X が Hausdorff ではないことを背理法により示す．X が Hausdorff であると仮定する．X は無限集合だから，異なる 2 点 $x, y \in X$ が存在する．このとき，仮定より，$(*)$ をみたす X の開集合 O_x, O_y が存在する．余有限位相の定義より，$X \setminus O_x$ は有限集合．更に，$(*)$ の第 3 式より，$O_y \subset X \setminus O_x$．よって，$O_y$ は有限集合．ここで，余有限位相の定義より，$X \setminus O_y$ は有限集合で，

$$X = O_y \cup (X \setminus O_y).$$

したがって，X は有限集合となり，矛盾．以上より，X は Hausdorff ではない．

Hausdorff 空間について，次がなりたつ．

定理　Hausdorff 空間の 1 点のみからなる部分集合は閉集合．

証明　X を Hausdorff 空間とし，$x \in X$ とする．

$X = \{x\}$ のとき，$\{x\}$ は明らかに X の閉集合．

$X \neq \{x\}$ のとき，$y \in X \setminus \{x\}$ とする．$x \neq y$ で，X は Hausdorff だから，$(*)$ をみたす X の開集合 O_x, O_y が存在する．このとき，$O_y \subset X \setminus \{x\}$ だから，y は $X \setminus \{x\}$ の内点．y は任意だから，$X \setminus \{x\}$ は X の開集合．よって，$\{x\}$ は X の閉集合．

したがって，Hausdorff 空間の 1 点のみからなる部分集合は閉集合．□

位相空間の Hausdorff 性は次のように特徴付けることができる．

定理　X を位相区間とすると，次の (1)〜(3) は同値．

(1) X は Hausdorff．

(2) 積空間 $X \times X$ の対角線集合，すなわち

$$\{(x, x) | x \in X\}$$

は $X \times X$ の閉集合．

(3) 任意の $x \in X$ に対して，x の閉近傍全体の共通部分は $\{x\}$．

証明　$X \times X$ の対角線集合を Δ とおく．

(1) $\Rightarrow$ (2): $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$ とする．このとき，x, y は X の異なる 2 点．仮定より，$(*)$ をみたす X の開集合 O_x, O_y が存在する．ここで，$(*)$ は

$$(x, y) \in O_x \times O_y, \quad O_x \times O_y \subset (X \times X) \setminus \Delta \tag{$**$}$$

と同値．よって，(x, y) は $(X \times X) \setminus \Delta$ の内点．(x, y) は任意だから，$(X \times X) \setminus \Delta$ は $X \times X$ の開集合．したがって，Δ は $X \times X$ の閉集合．

(2) $\Rightarrow$ (3): $y \in X$ を x と異なる点とする．このとき，$(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$．仮定より，$(X \times X) \setminus \Delta$ は $X \times X$ の開集合だから，$(**)$，すなわち $(*)$ をみたす X のある開集合 O_x, O_y が存在する．ここで，$(*)$ の第 3 式より，$O_y \subset X \setminus O_x$．よって，

$$\begin{aligned} X \setminus \overline{O_x} &= (X \setminus O_x)^i \\ &\supset {O_y}^i \\ &= O_y. \end{aligned}$$

すなわち, $O_y \subset X \setminus \overline{O_x}$ だから,

$$\overline{O_x} \cap O_y = \emptyset.$$

したがって, $\overline{O_x}$ は y を含まない x の閉近傍. y は任意だから, x の閉近傍全体の共通部分は $\{x\}$.
(3) ⇒ (1): $x, y \in X$ を異なる 2 点とする. 仮定より, y を含まない x の閉近傍 U が存在する. ここで, $O_x = U^i$, $O_y = X \setminus U$ とおく. このとき, O_x, O_y は X の開集合で, $(*)$ をみたす. よって, X は Hausdorff. □

Hausdorff 空間におけるコンパクト性についても述べておこう.

定理 Hausdorff 空間のコンパクト部分集合は閉集合.

証明 X を Hausdorff 空間, A を X のコンパクト部分集合とする. $x \in X \setminus A$ とすると, X は Hausdorff だから, 任意の $a \in A$ に対して, X のある開集合 $O_{x,a}$, $O'_{x,a}$ が存在し,

$$x \in O_{x,a}, \quad a \in O'_{x,a}, \quad O_{x,a} \cap O'_{x,a} = \emptyset.$$

このとき, $(O'_{x,a})_{a\in A}$ は A の開被覆. ここで, A はコンパクトだから, $(O'_{x,a})_{a\in A}$ の有限部分被覆 $(O'_{x,a_i})_{i=1}^n$ が存在する. よって,

$$O = \bigcap_{j=1}^n O_{x,a_j}$$

とおくと, $i = 1, 2, \ldots, n$ のとき,

$$\begin{aligned} O \cap O'_{x,a_i} &= \left(\bigcap_{j=1}^n O_{x,a_j}\right) \cap O'_{x,a_i} \\ &\subset O_{x,a_i} \cap O'_{x,a_i} \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

すなわち

$$O \cap O'_{x,a_i} = \emptyset$$

だから,

$$\begin{aligned} O \cap A &\subset O \cap \left(\bigcup_{i=1}^n O'_{x,a_i}\right) \\ &= \bigcup_{i=1}^n (O \cap O'_{x,a_i}) \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

すなわち, $O \subset X \setminus A$ だから, x は $X \setminus A$ の内点. したがって, $X \setminus A$ は X の開集合となるから, A は X の閉集合. すなわち, Hausdorff 空間のコンパクト部分集合は閉集合. □

上の定理より, 次を示すことができる.

定理 コンパクト空間から Hausdorff 空間への全単射連続写像は同相写像.

証明 X をコンパクト空間, Y を Hausdorff 空間, f を X から Y への全単射連続写像とする. f^{-1} が連続であることを示せばよい.

A を X の閉集合とする. X はコンパクトだから, A はコンパクト. f は連続だから, $f(A)$ はコンパクト. Y は Hausdorff だから, 上の定理より, $f(A)$, すなわち, $(f^{-1})^{-1}(A)$ は Y の閉集合. したがって, f^{-1} は連続. □

問題 7

1. Hausdorff 空間の部分空間は Hausdorff であることを示せ.

2. 2 つの Hausdorff 空間の積空間は Hausdorff であることを示せ. 更に, Hausdorff 空間の族の積空間は Hausdorff であることが分かる.

3. X を位相空間, Y を Hausdorff 空間, f, g を X から Y への連続写像とする. このとき, $A \subset X$ を

$$A = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$$

により定める. A は X の閉集合であることを示せ.

4. X を空でない集合, $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_2$ を X の位相とする. $(X, \mathfrak{O}_1)$ がコンパクト, $(X, \mathfrak{O}_2)$ が Hausdorff で, $\mathfrak{O}_1 \supset \mathfrak{O}_2$ ならば, $\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{O}_2$ であることを示せ.

5. X を位相空間とする. 任意の異なる $x, y \in X$ に対して, $x \in O$, $y \notin O$ となる X の開集合 O が存在するとき, X は Fréchet の分離公理または第一分離公理をみたすという. このとき, X を Fréchet 空間または T_1 空間という. 定義より, 第一分離公理をみたすという性質は位相的性質である. また, Hausdorff 空間は T_1 空間である.

(1) X が T_1 空間であることと X の任意の 1 点のみからなる部分集合が閉集合であることは同値であることを示せ.

(2) X の位相が余有限位相のとき, X は T_1 空間であることを示せ.

6. T_1 空間の部分空間は T_1 空間であることを示せ.

7. 2 つの T_1 空間の積空間は T_1 空間であることを示せ. 更に, T_1 空間の族の積空間は T_1 空間であることが分かる.

8. X を位相空間とする. 任意の異なる $x, y \in X$ に対して, $x \in O$, $y \notin O$ または $x \notin O$, $y \in O$ となる X の開集合 O が存在するとき, X は Kolmogorov の分離公理をみたすという. このとき, X を Kolmogorov 空間または T_0 空間という. 定義より, Kolmogorov の分離公理をみたすという性質は位相的性質である. また, T_1 空間は T_0 空間である.

X が 2 点からなる位相空間のとき, X が T_0 空間あるいは T_1 空間であるかを調べよ.

問題 7 の解答

1. X を Hausdorff 空間, A を X の部分空間, $x, y \in A$ を異なる 2 点とする. X は Hausdorff だから,

$$x \in O_x, \quad y \in O_y, \quad O_x \cap O_y = \emptyset$$

となる X の開集合 O_x, O_y が存在する. このとき, $O_x \cap A$, $O_y \cap A$ は A の開集合で,

$$x \in O_x \cap A, \quad y \in O_y \cap A, \quad (O_x \cap A) \cap (O_y \cap A) = \emptyset.$$

よって, A の任意の異なる 2 点は開集合により分離されるから, A は Hausdorff. したがって, Hausdorff 空間の部分空間は Hausdorff.

2. X, Y を Hausdorff 空間とし, $(x, y), (x', y') \in X \times Y$, $(x, y) \neq (x', y')$ とする. このとき, 積集合の定義より, $x \neq x'$ または $y \neq y'$.

$x \neq x'$ のとき, X は Hausdorff だから,

$$x \in O, \quad x' \in O', \quad O \cap O' = \emptyset$$

となる X の開集合 O, O' が存在する. このとき, 積空間の定義より, $O \times Y$, $O' \times Y$ は $X \times Y$ の開集合で,

$$(x, y) \in O \times Y, \quad (x', y') \in O' \times Y, \quad (O \times Y) \cap (O' \times Y) = \emptyset.$$

よって, (x, y) と (x', y') は開集合により分離される.

$y \neq y'$ のとき, 上と同様に, (x, y) と (x', y') は開集合により分離される.

したがって, $X \times Y$ は Hausdorff. すなわち, 2 つの Hausdorff 空間の積空間は Hausdorff.

3. $x \in X \setminus A$ とする. このとき, A の定義より, $f(x) \neq g(x)$. Y は Hausdorff だから,

$$f(x) \in U, \quad g(x) \in V, \quad U \cap V = \emptyset$$

となる Y の開集合 U, V が存在する. ここで, f, g は連続だから, $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ は x を含む X の開集合で,

$$f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subset X \setminus A.$$

よって, x は $X \setminus A$ の内点. x は任意だから, $X \setminus A$ は X の開集合. したがって, A は X の閉集合.

4. まず, X 上の恒等写像 1_X は $(X, \mathfrak{O}_1)$ から $(X, \mathfrak{O}_2)$ への全単射を定める.

ここで, $O \in \mathfrak{O}_2$ とすると, $\mathfrak{O}_1 \supset \mathfrak{O}_2$ だから,

$$\begin{aligned} {1_X}^{-1}(O) &= O \\ &\in \mathfrak{O}_2 \\ &\subset \mathfrak{O}_1. \end{aligned}$$

すなわち, ${1_X}^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_1$. よって, 1_X は連続.

更に, $(X, \mathfrak{O}_1)$ はコンパクトで, $(X, \mathfrak{O}_2)$ は Hausdorff だから, 1_X は同相写像. したがって, $\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{O}_2$.

5. (1) まず, X が T_1 空間であると仮定する. $x \in X$ に対して, $y \in X \setminus \{x\}$ とする. このとき,

$y \neq x$ だから, 仮定より, $y \in O_y$, $x \notin O_y$ となる X の開集合 O_y が存在する. よって,

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} O_y.$$

したがって, $X \setminus \{x\}$ は X の開集合だから, $\{x\}$ は X の閉集合. すなわち, X の任意の 1 点のみからなる部分集合は閉集合.

逆に, X の任意の 1 点のみからなる部分集合が閉集合であると仮定する. $x, y \in X$ を異なる 2 点とする. このとき, $O = X \setminus \{y\}$ とおくと, $x \in O$, $y \notin O$. また, 仮定より, $\{y\}$ は X の閉集合だから, O は X の開集合. よって, X は T_1 空間.

(2) 余有限位相の定義より, X の有限部分集合は閉集合. 特に, X の任意の 1 点のみからなる部分集合は閉集合. よって, (1) より, X は T_1 空間.

6. X を T_1 空間, A を X の部分空間, $x, y \in A$ を異なる 2 点とする. X は T_1 空間だから, $x \in O$, $y \notin O$ となる X の開集合 O が存在する. このとき, $O \cap A$ は A の開集合で,

$$x \in O \cap A, \quad y \notin O \cap A.$$

よって, A は T_1 空間. したがって, T_1 空間の部分空間は T_1 空間.

7. X, Y を T_1 空間とし, $(x, y), (x', y') \in X \times Y$, $(x, y) \neq (x', y')$ とする. このとき, 積集合の定義より, $x \neq x'$ または $y \neq y'$.

$x \neq x'$ のとき, X は T_1 空間だから, $x \in U$, $x' \notin U$ となる X の開集合 U が存在する. このとき, 積空間の定義より, $U \times Y$ は $X \times Y$ の開集合で,

$$(x, y) \in U \times Y, \quad (x', y') \notin U \times Y.$$

$y \neq y'$ のとき, 上と同様に, $y \in V$, $y' \notin V$ となる Y の開集合 V が存在する. 更に, $X \times V$ は $X \times Y$ の開集合で,

$$(x, y) \in X \times V, \quad (x', y') \notin X \times V.$$

よって, $X \times Y$ は T_1 空間.

8. $\mathfrak{O}$ を X の位相とし, X を

$$X = \{p, q\}$$

と表しておく. このとき, $\mathfrak{O}$ は

$$\mathfrak{O}_1 = \{\emptyset, X\}, \quad \mathfrak{O}_2 = \{\emptyset, \{p\}, X\}, \quad \mathfrak{O}_3 = \{\emptyset, \{q\}, X\}, \quad \mathfrak{O}_4 = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, X\}$$

の何れかである. また, X の異なる 2 点は p, q のみである.

$\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_1$ のとき, p を含む X の開集合も q を含む X の開集合も X のみだから, X は Kolmogorov の分離公理をみたさない. よって, X は T_0 空間ではない. したがって, X は T_1 空間ではない.

$\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_2$ のとき, $\{p\}$ は p を含む X の開集合で, q を含まないから, X は Kolmogorov の分離公理をみたす. よって, X は T_0 空間. しかし, q を含む X の開集合は X のみだから, X は第一分離公理をみたさない. したがって, X は T_1 空間ではない.

$\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_3$ のとき, $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_2$ のときと同様に, X は T_0 空間であるが, T_1 空間ではない.

$\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_4$ のとき, X の任意の 1 点のみからなる部分集合は閉集合. よって, X は T_1 空間. したがって, X は T_0 空間.