§8. 正則空間と正規空間

位相空間論における分離公理は §7 において扱ったもの以外にも多くのものが知られている. ここでは, それらの中でも基本的なものについて述べよう. まず, 第三分離公理から始めよう.

定義　X を位相空間とする.
$x \in X$ とし, A を x を含まない X の閉集合とする. X の開集合 O_x, O_A で,

$$x \in O_x, \quad A \subset O_A, \quad O_x \cap O_A = \emptyset$$

となるものが存在するとき, x と A は開集合により分離されるという.
X の任意の点とその点を含まない任意の閉集合が開集合により分離されるとき, X は Vietoris の分離公理または第三分離公理をみたすという. 第三分離公理をみたす位相空間を Vietoris 空間または T_3 空間という.

定義より, 第三分離公理をみたすという性質は位相的性質である.
位相空間の１点のみからなる部分集合は必ずしも閉集合であるとは限らないため, 第三分離公理から第二分離公理, すなわち Hausdorff 性が導かれる訳ではない.

例　X を３点 p, q, r からなる集合とし, X の部分集合系 $\mathfrak{O}$ を

$$\mathfrak{O} = \{\emptyset, \{p\}, \{q, r\}, X\}$$

により定める. このとき, $\mathfrak{O}$ は X の位相となり, X の閉集合系は $\mathfrak{O}$ に一致する.
$\{q, r\}$ は p を含まない X の閉集合である. $\{p\}$, $\{q, r\}$ は X の開集合だから, p と $\{q, r\}$ は開集合により分離される. その他の場合も同様に考えると, X は第三分離公理をみたすことが分かる.
しかし, q と r は開集合により分離されないから, X は第二分離公理をみたさない.

そこで, 問題７において扱った第一分離公理をみたす位相空間, すなわち T_1 空間が任意の１点のみからなる部分集合が閉集合となる位相空間であったことを思い出し, 次のように定める.

定義　第一分離公理および第三分離公理をみたす位相空間は正則であるという. 正則な位相空間を正則空間という.

注意　上において述べたことより, 正則空間は Hausdorff である.
また, 正則性は位相的性質である.
なお, 文献によっては, 単に第三分離公理をみたす位相空間を正則空間と定義していることもある.

第三分離公理は次のように特徴付けることができる.

定理　X を位相空間とすると, 次の (1), (2) は同値.

(1) X は第三分離公理をみたす.
(2) 任意の $x \in X$ に対して, x の閉近傍全体の集合は x の基本近傍系となる.

証明　(1) $\Rightarrow$ (2): U を x の近傍とする. このとき, $x \in U^i$ だから, $X \setminus U^i$ は x を含まない X の閉集合. 仮定より, X の開集合 O, O' で,

$$x \in O, \quad X \setminus U^i \subset O', \quad O \cap O' = \emptyset$$

となるものが存在する．よって, $\overline{O}$ は x の閉近傍で,

$$\overline{O} \cap O' = \emptyset$$

となるから, $\overline{O} \subset U$. したがって, x の閉近傍全体の集合は x の基本近傍系となる．
(2) $\Rightarrow$ (1): A を x を含まない X の閉集合とする．このとき, $X \setminus A$ は x の近傍．仮定より, x の閉近傍 U^* で, $U^* \subset X \setminus A$ となるものが存在する．よって, $(U^*)^i$, $X \setminus U^*$ は X の開集合で,

$$x \in (U^*)^i, \quad A \subset X \setminus U^*, \quad (U^*)^i \cap (X \setminus U^*) = \emptyset.$$

すなわち, x と A は開集合により分離される．したがって, X は第三分離公理をみたす． □

距離空間は正則空間の例となるが, 実は正規性という正則性よりも強い条件をみたす．

定義 X を位相空間とする．

A, B を互いに交わらない X の閉集合とする．X の開集合 O_A, O_B で,

$$A \subset O_A, \quad B \subset O_B, \quad O_A \cap O_B = \emptyset$$

となるものが存在するとき, A と B は開集合により分離されるという．

X の互いに交わらない任意の閉集合が開集合により分離されるとき, X は Tietze の分離公理または第四分離公理をみたすという．第四分離公理をみたす位相空間を Tietze 空間または T_4 空間という．

第一分離公理および第四分離公理をみたす位相空間は正規であるという．正規な位相空間を正規空間という．

注意 定義より, 正規空間は正則空間である．

また, 第四分離公理をみたすという性質や正規性は位相的性質である．

正則性の場合と同様に, 文献によっては, 単に第四分離公理をみたす位相空間を正規空間と定義していることもある．

距離空間の正規性を示すための準備をしよう．(X, d) を距離空間とし, $x \in X$, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ とする．このとき, x と A の距離 $d(x, A)$ を

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) | a \in A\}$$

により定める．このように定めた $d(x, A)$ について, 次がなりたつ．

定理 (X, d) を距離空間とし, $x, y \in X$, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ とすると, 次の (1), (2) がなりたつ．
(1) $d(x, A) = 0$ と $x \in \overline{A}$ は同値.
(2) $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. 特に, x の関数 $d(x, A)$ は X 上の実数値連続関数.

証明 (1): まず, $d(x, A) = 0$ であると仮定する．このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $d(x, y) < \varepsilon$ となる $y \in A$ が存在する．よって,

$$B(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

だから, x は A の外点ではない．したがって, $x \in \overline{A}$.

上の議論は逆に辿ることもできるから, $x \in \overline{A}$ ならば, $d(x, A) = 0$.

以上より, $d(x, A) = 0$ と $x \in \overline{A}$ は同値.
(2): $z \in A$ とすると, $d(x, A)$ の定義および三角不等式より,

$$\begin{aligned} d(x, A) &\leq d(x, z) \\ &\leq d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

よって,

$$d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,z).$$

z に関して下限を取ると,

$$d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,A).$$

すなわち,

$$d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y).$$

同様に,

$$d(y,A) - d(x,A) \leq d(x,y).$$

したがって,

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y).$$

□

それでは, 次を示そう.

定理　距離空間は正規.

証明　(X,d) を距離空間とする.

まず, X は第一分離公理をみたす.

次に, A, B を互いに交わらない X の閉集合とする. このとき, X で定義された実数値関数 f を

$$f(x) = d(x,A) - d(x,B) \quad (x \in X)$$

により定める. 上の定理の (2) より, f は連続. よって, X の部分集合 O_A, O_B を

$$O_A = \{x | f(x) < 0\} = f^{-1}((-\infty, 0)), \quad O_B = \{x | f(x) > 0\} = f^{-1}((0, +\infty))$$

により定めると, O_A, O_B は互いに交わらない X の開集合.

ここで, $x \in A$ とすると, $d(x,A) = 0$. また, A, B は互いに交わらない X の閉集合だから, $x \notin \overline{B}$. よって, 上の定理の (1) より, $d(x,B) > 0$ だから, $f(x) < 0$. すなわち $x \in O_A$. 同様に, $x \in B$ とすると, $x \in O_B$. したがって, $A \subset O_A$, $B \subset O_B$ となり, A と B は開集合により分離される. すなわち, X は第四分離公理をみたす.

以上より, X は正規. □

上の定理の証明において, f は上で定めたものの代わりに,

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)} \quad (x \in X)$$

と定めても, A と B は開集合 $f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$ と $f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ を用いて分離することができる. このとき, f は次の (i)〜(iii) をみたす.

(i) 任意の $x \in X$ に対して, $0 \leq f(x) \leq 1$.

(ii) $x \in A$ のとき, $f(x) = 0$.

(iii) $x \in B$ のとき, $f(x) = 1$.

実は, 次がなりたつことが分かる.

Urysohn の補題　X を T_4 空間, A, B を互いに交わらない X の閉集合とする. このとき, 上の (i)〜(iii) をみたす X で定義された実数値連続関数 f が存在する.

問題 8

1. T_3 空間の部分空間は T_3 空間であることを示せ. 特に, 問題 7 において扱ったことと合わせると, 正則空間の部分空間は正則である.

2. 2 つの T_3 空間の積空間は T_3 空間であることを示せ. 更に, T_3 空間の族の積空間は T_3 空間であることが分かる. 特に, 問題 7 において扱ったことと合わせると, 正則空間の族の積空間は正則である.

3. $\mathbf{R}$ の部分集合 K を

$$K = \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbf{N} \right\}$$

により定め, $\mathbf{R}$ の部分集合系 $\mathfrak{B}$ を

$$\mathfrak{B} = \{ I | I \text{ は開区間} \} \cup \{ I \setminus K | I \text{ は開区間} \}$$

により定める. このとき, $\mathfrak{B}$ は $\mathbf{R}$ のある位相の基底となる. $\mathfrak{O}_K$ を $\mathfrak{B}$ を基底とする $\mathbf{R}$ の位相とすると, $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_K)$ は Hausdorff であることが容易に分かる. $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_K)$ は正則ではないことを示せ.

4. $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ を Sorgenfrey 直線とする. すなわち, $\mathfrak{O}_l$ は右半開区間全体の集合を基底とする $\mathbf{R}$ の位相である. $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ は正規であることを示せ.

なお, $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ と $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ 自身の積空間を Sorgenfrey 平面という. Sorgenfrey 平面は正規ではないことが知られている. 特に, 正規性は積空間に遺伝するとは限らない. また, 正規ではない部分空間が存在するような正規空間の例も知られている. 特に, 正規性は部分空間にも遺伝するとは限らない.

5. X を位相空間とする. 任意の $x \in X$ と x を含まない X の任意の閉集合 A に対して, X で定義された実数値連続関数 f で, 次の (i)〜(iii) をみたすものが存在するとき, X は Tychonoff の分離公理をみたすという.

(i) 任意の $y \in X$ に対して, $0 \leq f(y) \leq 1$.
(ii) $f(x) = 0$.
(iii) $y \in A$ のとき, $f(y) = 1$.

Tychonoff の分離公理をみたす位相空間を Tychonoff 空間または $T_{3\frac{1}{2}}$ 空間という. 更に, 第一分離公理および Tychonoff の分離公理をみたす位相空間は完全正則であるという. 完全正則な位相空間を完全正則空間という. 完全正則性は位相的性質である.

正規空間は完全正則空間であることを示せ. なお, 完全正則空間は正則空間であることも分かる.

問題 8 の解答

1. X を T_3 空間, A を X の部分空間とする. $x \in A$ とし, B を x を含まない A の閉集合とすると, 相対位相の定義より,

$$B = C \cap A$$

となる X の閉集合 C が存在する. このとき, $x \notin C$. X は T_3 空間だから,

$$x \in O_x, \quad C \subset O_C, \quad O_x \cap O_C = \emptyset$$

となる X の開集合 O_x, O_C が存在する. このとき, $O_x \cap A$, $O_C \cap A$ は A の開集合で,

$$x \in O_x \cap A, \quad B \subset O_C \cap A, \quad (O_x \cap A) \cap (O_C \cap A) = \emptyset.$$

よって, x と B は開集合により分離されるから, A は T_3 空間. したがって, T_3 空間の部分空間は T_3 空間.

2. X, Y を T_3 空間とする. $(x, y) \in X \times Y$ とし, U を (x, y) の近傍とすると, 積位相の定義より,

$$(x, y) \in O_x \times O_y \subset U$$

となる X の開集合 O_x, Y の開集合 O_y が存在する. ここで, X は T_3 空間だから, x の閉近傍全体の集合は x の基本近傍系となる. よって, $x \in O'_x$, $\overline{O'_x} \subset O_x$ となる X の開集合 O'_x が存在する. 同様に, $y \in O'_y$, $\overline{O'_y} \subset O_y$ となる Y の開集合 O'_y が存在する. このとき, $(x, y) \in O'_x \times O'_y$. また,

$$\begin{aligned} \overline{O'_x \times O'_y} &= \overline{O'_x} \times \overline{O'_y} \\ &\subset O_x \times O_y \end{aligned}$$

となるから,

$$\overline{O'_x \times O'_y} \subset O_x \times O_y.$$

したがって, (x, y) の閉近傍全体の集合は (x, y) の基本近傍系となるから, $X \times Y$ は T_3 空間. すなわち, 2 つの T_3 空間の積空間は T_3 空間.

3. 背理法により示す.

$(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_K)$ が第三分離公理をみたすと仮定する. $\mathfrak{O}_K$ の定義より, K は 0 を含まない $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_K)$ の閉集合. 仮定より,

$$0 \in O_0, \quad K \subset O_K, \quad O_0 \cap O_K = \emptyset$$

となる $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_K)$ の開集合 O_0, O_K が存在する. ここで, I を 0 を含む開区間とすると,

$$I \cap K \neq \emptyset.$$

よって, 基底の定義より,

$$0 \in (a, b) \setminus K \subset O_0$$

となる開区間 (a, b) が存在する. 更に, $\frac{1}{N} \in K$ $(N \in \mathbf{N})$ を $\frac{1}{N} \in (a, b)$ となるように選んでおくと, 基底の定義より,

$$\frac{1}{N} \in (c, d) \subset O_K$$

となる開区間 (c, d) が存在する．このとき，$z \in \mathbf{R}$ を

$$\max\left\{c, \frac{1}{N+1}\right\} < z < \frac{1}{N}$$

となるように選んでおくと，

$$\begin{aligned} z &\in ((a,b) \setminus K) \cap (c,d) \\ &\subset O_0 \cap O_K. \end{aligned}$$

これは矛盾．したがって，$(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_K)$ は第三分離公理をみたさない．以上より，$(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_K)$ は正則ではない．

4. まず，$x \in \mathbf{R}$ とすると，

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \setminus \{x\} &= (-\infty, x) \cup (x, +\infty) \\ &= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [x-n, x)\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[x + \frac{1}{n}, x+n\right)\right) \\ &\in \mathfrak{O}_l. \end{aligned}$$

すなわち，$\mathbf{R} \setminus \{x\} \in \mathfrak{O}_l$．よって，$\{x\}$ は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ の閉集合．したがって，$(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ は第一分離公理をみたす．

次に，A, B を互いに交わらない $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ の閉集合とする．$a \in A$ とすると，$\mathbf{R} \setminus B$ は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ の開集合で，$a \in \mathbf{R} \setminus B$．よって，基底の定義より，

$$a \in [a, x_a) \subset \mathbf{R} \setminus B$$

となる $x_a \in \mathbf{R}$ が存在する．同様に，$b \in B$ とすると，

$$b \in [b, x_b) \subset \mathbf{R} \setminus A$$

となる $x_b \in \mathbf{R}$ が存在する．ここで，$\mathbf{R}$ の部分集合 O_A, O_B を

$$O_A = \bigcup_{a \in A} [a, x_a), \quad O_B = \bigcup_{b \in B} [b, x_b)$$

により定めると，O_A, O_B は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ の開集合で，

$$A \subset O_A, \quad B \subset O_B, \quad O_A \cap O_B = \emptyset$$

となる．したがって，A と B は開集合により分離されるから，$(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ は第四分離公理をみたす．

以上より，$(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ は正規．

5. X を正規空間とする．正規性の定義より，X が Tychonoff の分離公理をみたすことを示せばよい．$x \in X$ とし，A を x を含まない X の閉集合とする．X は第一分離公理をみたすから，$\{x\}$ は X の閉集合．また，X は第四分離公理をみたす．よって，Urysohn の補題より，(i)〜(iii) の条件をみたす X で定義された実数値連続関数 f が存在する．したがって，X は Tychonoff の分離公理をみたす．