§9. 局所コンパクト空間

ここでは, コンパクト空間の一般化である局所コンパクト空間について述べよう.

定義　X を位相空間とする. 任意の $x \in X$ に対して, x の近傍でコンパクトなものが存在するとき, X は局所コンパクトであるという. 局所コンパクトな位相空間を局所コンパクト空間という.

定義より, 局所コンパクト性は位相的性質である.
局所コンパクト空間の例について考えよう.

例　コンパクト空間は局所コンパクトである. 実際, コンパクト空間 X の任意の点 x に対して, X 自身は x のコンパクトな近傍である.

例　X を離散空間とする.
§3 において述べたように, X がコンパクトとなるのは X が有限集合のときであった.
一方, X は局所コンパクトである. 実際, 任意の $x \in X$ に対して, $\{x\}$ は x のコンパクトな近傍である.

例　§5 において述べたように, $\mathbf{R}^n$ のコンパクト部分集合は有界閉集合に限る.
ここで, $\mathbf{R}^n$ は有界ではないから, コンパクトではない.
一方, $\mathbf{R}^n$ は局所コンパクトである. 実際, 任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して, $\overline{B(x;1)}$ は $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合だから, x のコンパクトな近傍となる.

例　$\mathbf{R}$ の部分空間 $\mathbf{Q}$ は局所コンパクトではない. このことを背理法により示そう.
$\mathbf{Q}$ が局所コンパクトであると仮定する. このとき, $0 \in \mathbf{Q}$ のコンパクトな近傍 U が存在する. $\mathbf{Q}$ は $\mathbf{R}$ の部分空間で, U は 0 の近傍だから,

$$0 \in I \cap \mathbf{Q} \subset U$$

となる開区間 I が存在する. I は無理数を含むから, U の Cauchy 列で, U の点に収束しないものが存在する. U はコンパクトだから, これは矛盾. よって, $\mathbf{Q}$ は局所コンパクトではない.

例　$p \geq 1$ とし, $(l^p, \|\ \|)$ を問題 5 において扱った Banach 空間とする. すなわち,

$$l^p = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \,\middle|\, \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \text{ となる実数列} \right\},$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p)$$

である. l^p は局所コンパクトではないことを背理法により示そう.
l^p が局所コンパクトであると仮定する. このとき, l^p の零ベクトル 0 のコンパクトな近傍 U が存在する. U は 0 の近傍だから, ある $\varepsilon > 0$ が存在し, $B(0;\varepsilon) \subset U$. ここで, $A \subset l^p$ を

$$A = \left\{ x \in l^p \,\middle|\, \|x\|_p = \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

により定めると, A は U の閉集合. 更に, 問題 5 と同様に, A はコンパクトではないことが分かる. U はコンパクトだから, これは矛盾. よって, l^p はコンパクトではない.
なお, 一般にノルム空間が局所コンパクトとなるのはその次元が有限であるときに限ることが分かる.

局所コンパクト Hausdorff 空間は正則であることが分かるが, まず, Hausdorff 空間やコンパクト Hasudorff 空間に関する準備をしておこう.

定理 X を Hausdorff 空間とする. $x \in X$ とし, A を x を含まない X のコンパクト部分集合とすると, x と A は開集合により分離される.

証明 $a \in A$ とする. X は Hausdorff だから, X の開集合 O_x, O_a で,

$$x \in O_x, \quad a \in O_a, \quad O_x \cap O_a = \emptyset$$

となるものが存在する. このとき,

$$\overline{O_a} \cap O_x = \emptyset$$

となるから, $x \notin \overline{O_a}$. また, $(O_a)_{a \in A}$ は A の開被覆.

ここで, A はコンパクトだから, $(O_a)_{a \in A}$ の有限部分被覆 $(O_{a_i})_{i=1}^n$ が存在する. このとき, X の開集合 V を

$$V = \bigcup_{i=1}^n O_{a_i}$$

により定めると,

$$\overline{V} = \bigcup_{i=1}^n \overline{O_{a_i}}$$

だから, $x \notin \overline{V}$. よって, $U = X \setminus \overline{V}$ とおくと, U は X の開集合で,

$$x \in U, \quad A \subset V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

したがって, x と A は開集合により分離される. □

定理 コンパクト Hausdorff 空間は正規.

証明 X をコンパクト Hausdorff 空間, A, B を互いに交わらない X の閉集合とする. X はコンパクトだから, A, B はコンパクト. $b \in B$ とすると, 上の定理より, X の開集合 O_b, O_A で,

$$b \in O_b, \quad A \subset O_A, \quad O_b \cap O_A = \emptyset$$

となるものが存在する. このとき,

$$\overline{O_b} \cap O_A = \emptyset$$

で, $(O_b)_{b \in B}$ は B の開被覆.

ここで, B はコンパクトだから, $(O_b)_{b \in B}$ の有限部分被覆 $(O_{b_i})_{i=1}^n$ が存在する. このとき, X の開集合 V を

$$V = \bigcup_{i=1}^n O_{b_i}$$

により定めると,

$$\overline{V} = \bigcup_{i=1}^n \overline{O_{b_i}}$$

だから,

$$A \cap \overline{V} = \emptyset.$$

よって, $U = X \setminus \overline{V}$ とおくと, U は X の開集合で,

$$A \subset U, \quad B \subset V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

したがって, A と B は開集合により分離されるから, X は正規. すなわち, コンパクト Hausdorff 空間は正規. □

それでは, 次を示そう.

定理 局所コンパクト Hausdorff 空間は正則.

証明 X を局所コンパクト Hausdorff 空間とする. X は Hausdorff だから, X が T_3 空間であることを示せばよい.

$x \in X$ とし, U を x の近傍とする. X は局所コンパクトだから, x のコンパクトな近傍 V が存在する. X の部分空間 V はコンパクト Hausdorff 空間となるから, 上の定理より, V は正規. 特に, V は正則. 更に, $U \cap V$ は V における x の近傍となるから, V における x の閉近傍 W で,

$$x \in W \subset U \cap V$$

となるものが存在する. ここで, V は Hausdorff 空間 X のコンパクト部分集合だから, X の閉集合. よって, W は X の閉集合. また, V は X における x の近傍, W は V における x の近傍だから, W は X における x の近傍となる. したがって, W は

$$x \in W \subset U$$

となる X における x の閉近傍となるから, X は正則. すなわち, 局所コンパクト Hausdorff 空間は正則. □

上の定理の証明より, 次がなりたつ.

定理 X を局所コンパクト Hausdorff 空間とする. このとき, 任意の $x \in X$ に対して, x のコンパクトな近傍全体の集合は x の基本近傍系となる.

更に, 次がなりたつ.

定理 X を局所コンパクト空間とし, $A \subset X$ とする. A が X の開集合または閉集合ならば, X の部分空間 A は局所コンパクト.

証明 $x \in A$ とする.

A が X の開集合のとき, A は X における x の近傍だから, 上の定理より,

$$x \in U \subset A$$

となる X における x のコンパクトな近傍 U が存在する. このとき, U は A における x のコンパクトな近傍でもあるから, A は局所コンパクト.

A が X の閉集合のとき, X は局所コンパクトだから, X における x のコンパクトな近傍 U が存在する. 更に, A は X の閉集合だから, $U \cap A$ は X のコンパクト部分集合. よって, $U \cap A$ は A における x のコンパクトな近傍. したがって, A は局所コンパクト. □

上の定理を用いて, 幾何学において特に重要な局所コンパクト空間の例を挙げておこう.

例 (位相多様体)

M を Hausdorff 空間とし, $n \in \mathbf{N}$ とする. M の任意の点が $\mathbf{R}^n$ のある開集合と同相な近傍をもつとき, M を位相多様体という. このとき, n を M の次元という.

位相多様体の定義と上の定理より, 位相多様体は局所コンパクトである.

問題 9

1. X を局所コンパクト Hausdorff 空間, O を X の開集合, A を X の閉集合とする. このとき, X の部分空間 $O \cap A$ は局所コンパクトであることを示せ.

2. X を Hausdorff 空間, A を X の局所コンパクトな部分空間とする. このとき, X のある開集合 O および閉集合 B が存在し,

$$A = O \cap B$$

となることを示せ.

3. 可算個の局所コンパクト空間の族の積空間は局所コンパクトであることを示せ.

4. X をコンパクト Hausdorff 空間, $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ を X の連結閉部分集合からなる族で,

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

をみたすものとする. このとき, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ は連結であることを示せ.

5. 可算個のコンパクト部分集合の和集合として表される位相空間は σ コンパクトであるという. σ コンパクトな位相空間を σ コンパクト空間という. 定義より, σ コンパクト性は位相的性質である. また, コンパクト空間は σ コンパクトである.

$\mathbf{R}^n$ は σ コンパクトであることを示せ.

6. 任意の開被覆が高々可算部分被覆, すなわち高々可算個の元からなる部分被覆をもつような位相空間は Lindelöf であるという. Lindelöf な位相空間を Lindelöf 空間という. 定義より, Lindelöf 性は位相的性質である. また, コンパクト空間は Lindelöf である.

σ コンパクト空間は Lindelöf であることを示せ. なお, Sorgenfrey 直線は Lindelöf であるが, σ コンパクトではないことが知られている.

問題 9 の解答

1. $x \in O \cap A$ とする. O は X の開集合で, X は局所コンパクト Hausdorff だから, X における x のコンパクトな近傍 U で,

$$x \in U \subset O$$

となるものが存在する. このとき,

$$V = U \cap (O \cap A)$$

とおくと, V は $O \cap A$ における x の近傍. また, $U \subset O$ より,

$$V = U \cap A$$

で, A は X の閉集合だから, V はコンパクト空間 U の閉集合. よって, V はコンパクト. したがって, $O \cap A$ は局所コンパクト.

2. $x \in A$ とする. A は局所コンパクトだから, A における x のコンパクトな近傍 U が存在する. X は Hausdorff だから, U は X の閉集合. また, U は A における x の近傍だから,

$$x \in V \cap A \subset U$$

となる X の開集合 V が存在する. U は X の閉集合だから,

$$\begin{aligned} x &\in V \cap \overline{A} \\ &\subset \overline{V \cap A} \\ &\subset U. \end{aligned}$$

よって, U は $\overline{A}$ における x の近傍となる. x は任意だから, A は $\overline{A}$ の開集合. したがって, X のある開集合 O が存在し,

$$A = O \cap \overline{A}.$$

すなわち, $B = \overline{A}$ とおくと, B は X の閉集合で,

$$A = O \cap B.$$

3. $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ を局所コンパクト空間の族とし, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ とする. このとき, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, X_n は局所コンパクトだから, x_n のコンパクトな近傍 U_n が存在する. ここで, Tychonoff の定理より, $\prod_{n=1}^{\infty} U_n$ は $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ のコンパクトな近傍となる. よって, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ は局所コンパクト.

4. 背理法により示す.

$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ とおき, A が連結ではないと仮定する. このとき, 空でない A の閉集合 B, C で,

$$A = B \cup C, \quad B \cap C = \emptyset$$

となるものが存在する. また, 各 A_n は X の閉集合だから, A は X の閉集合. 更に, B, C は A の閉集合だから, B, C は X の閉集合.

ここで, X はコンパクト Hausdorff だから, 正規であることに注意すると, X のある開集合 O_B, O_C が存在し,

$$B \subset O_B, \quad C \subset O_C, \quad O_B \cap O_C = \emptyset.$$

更に, $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

をみたすから, A の定義より, $n \in \mathbf{N}$ とすると,

$$\begin{aligned} A_n \cap O_B &\supset A \cap B \\ &= B. \end{aligned}$$

すなわち,

$$A_n \cap O_B \supset B \neq \emptyset.$$

同様に,

$$A_n \cap O_C \supset C \neq \emptyset.$$

また, A_n は連結だから,

$$A_n \not\subset O_B \cup O_C,$$

すなわち,

$$K = X \setminus (O_B \cup O_C)$$

とおくと, K は X の閉集合で,

$$A_n \cap K \neq \emptyset.$$

よって, X の閉集合からなる族 $(A_n \cap K)_{n\in\mathbf{N}}$ は有限交叉性をもつ.

ここで, X はコンパクトだから,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cap K) \neq \emptyset,$$

すなわち,

$$A \cap K \neq \emptyset.$$

よって,

$$A \not\subset O_B \cup O_C.$$

これは矛盾. したがって, A は連結.

5. $k \in \mathbf{N}$ とすると, $\overline{B(0;k)}$ は $\mathbf{R}^n$ のコンパクト部分集合で,

$$\mathbf{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{B(0;k)}.$$

よって, $\mathbf{R}^n$ は σ コンパクト.

6. X を σ コンパクト空間, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の開被覆とする. X は σ コンパクトだから, X のコンパクト部分集合からなる族 $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在し,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は A_n の開被覆. ここで, A_n はコンパクトだから, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆 $(U_{n,i_n})_{i_n=1}^{k_n}$ が存在する. このとき, $(U_{n,i_n})_{n\in\mathbf{N}, i_n=1,\dots,k_n}$ は $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の高々可算部分被覆. よって, X は Lindelöf. したがって, σ コンパクト空間は Lindelöf.