§10. パラコンパクト空間

ここでは, コンパクト空間のもう一つの一般化であるパラコンパクト空間について述べよう.

定義 X を位相空間とする.

$(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の部分集合族とする. 任意の $x \in X$ に対して, x の近傍 U が存在し, $U \cap U_\lambda \neq \emptyset$ となる $\lambda \in \Lambda$ の個数が有限個となるとき, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は局所有限であるという.

$(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$，$(V_\mu)_{\mu\in M}$ を X の被覆とする. 任意の $\mu \in M$ に対して, $V_\mu \subset U_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在するとき, $(V_\mu)_{\mu\in M}$ を $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の細分という.

X の任意の開被覆に対して, その細分となる局所有限な開被覆が存在するとき, X はパラコンパクトであるという.

注意 定義より, パラコンパクト性は位相的性質である.

パラコンパクト性の定義において, X は Hausdorff であることを仮定することもある.

例 コンパクト空間はパラコンパクトである. 実際, コンパクト空間の任意の開被覆は有限部分被覆をもつが, それは局所有限な細分でもある.

問題 9 において, σ コンパクト空間や Lindelöf 空間について扱ったことを思い出そう. $\mathbf{R}^n$ は σ コンパクトであり, σ コンパクト空間は Lindelöf であった. また, $\mathbf{R}^n$ は局所コンパクト Hausdorff であるから, 次の定理より, $\mathbf{R}^n$ はパラコンパクトとなる.

定理 局所コンパクト Hausdorff な Lindelöf 空間はパラコンパクト. 特に, 局所コンパクト Hausdorff な σ コンパクト空間はパラコンパクト.

証明 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の開被覆とする. $x \in X$ とすると, $x \in U_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在する. X は局所コンパクト Hausdorff だから, x のある開近傍 V_x で, $\overline{V_x}$ がコンパクトで,

$$x \in V_x \subset U_\lambda$$

となるものが存在する. このとき, $(V_x)_{x\in X}$ は X の開被覆. X は Lindelöf だから, $(V_x)_{x\in X}$ の高々可算部分被覆が存在する.

$(V_x)_{x\in X}$ の可算部分被覆 $(V_{x_n})_{n\in\mathbf{N}}$ が存在するとき, 簡単のため, V_{x_n} を単に V_n と表す. まず, $A_1 = \overline{V_1}$ とおくと, $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は A_1 の開被覆. ここで, A_1 はコンパクトだから, $N_1 \geq 2$ となる $N_1 \in \mathbf{N}$ が存在し,

$$A_1 \subset \bigcup_{n=1}^{N_1} V_n.$$

そこで,

$$A_2 = \bigcup_{n=1}^{N_1} \overline{V_n}$$

とおく. このとき, A_2 はコンパクトで,

$$A_1 \subset {A_2}^i, \quad \overline{V_2} \subset A_2.$$

次に, A_2 はコンパクトだから, $N_2 \geq 3$ となる $N_2 \in \mathbf{N}$ が存在し,

$$A_2 \subset \bigcup_{n=1}^{N_2} V_n.$$

そこで,

$$A_3 = \bigcup_{n=1}^{N_2} \overline{V_n}$$

とおく. このとき, A_3 はコンパクトで,

$$A_2 \subset {A_3}^i, \quad \overline{V_3} \subset A_3.$$

以下同様に, この操作を繰り返すと, X のコンパクト部分集合からなる族 $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ で,

$$A_n \subset {A_{n+1}}^i \quad (n \in \mathbf{N}), \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

となるものが得られる. ここで, $n \in \mathbf{N}$ に対して, X の開集合 W_n を

$$W_n = \begin{cases} {A_2}^i & (n = 1), \\ {A_{n+2}}^i \setminus A_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$$

により定める. このとき, $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は X の局所有限開被覆. 更に, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, $W_n \subset A_{n+2}$ で, A_{n+2} はコンパクトだから, ある $M_n \in \mathbf{N}$ が存在し,

$$A_{n+2} \subset \bigcup_{i_n=1}^{M_n} V_{i_n}$$

よって,

$$(W_n \cap V_{i_n})_{n\in\mathbf{N}, i_n=1,\ldots,M_n}$$

は $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の細分となる局所有限な X の開被覆. したがって, X はパラコンパクト.

$(V_x)_{x\in X}$ の有限部分被覆 $(V_{x_n})_{n\in\mathbf{N}}$ が存在するときも, 上と同様に考えればよい.

以上より, 局所コンパクト Hausdorff な Lindelöf 空間はパラコンパクト. □

注意 距離空間はパラコンパクトであることが知られている. この事実を Stone の定理という.

また, 位相多様体については, パラコンパクトであることと距離付け可能であることは同値であることが知られている.

パラコンパクト Hausdorff 空間について, 次がなりたつ.

定理 パラコンパクト Hausdorff 空間は正規である.

証明 X をパラコンパクト Hausdorff 空間とする.

まず, X が正則であることを示す. $x \in X$ とし, A を x を含まない X の閉集合とする. $a \in A$ とすると, X は Hausdorff だから, X の開集合 O_x, O_a で,

$$x \in O_x, \quad a \in O_a, \quad O_x \cap O_a = \emptyset$$

となるものが存在する. このとき, $(X \setminus A) \cup (O_a)_{a\in A}$ は X の開被覆. ここで, X はパラコンパクトだから, $(X \setminus A) \cup (O_a)_{a\in A}$ の細分となる局所有限な X の開被覆 $(V_\mu)_{\mu\in M}$ が存在する. $(V_\mu)_{\mu\in M}$ の元のうち $X \setminus A$ に含まれないもの, すなわちある O_a に含まれるもの全体からなる集合族を $(W_\nu)_{\nu\in N}$ とし,

$$W = \bigcup_{\nu\in N} W_\nu$$

とおく．このとき，細分と $(W_\nu)_{\nu \in N}$ の定義より，$A \subset W$．また，局所有限性の定義より，x のある近傍 U が存在し，U と交わる $(W_\nu)_{\nu \in N}$ の元は有限個．これらを $(W_i)_{i=1}^n$ とする．更に，各 W_i を含む $(V_\mu)_{\mu \in M}$ の元を V_i とし，V_i に対応する始めの O_x を O_i とする．ここで，

$$U' = U \cap \bigcap_{i=1}^{n} O_i$$

とおくと，U' は x の近傍で，

$$O_i \cap V_i = \emptyset \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

だから，

$$U' \cap W = \emptyset.$$

よって，x と A は開集合により分離される．

次に，A, B を互いに交わらない X の閉集合とする．$b \in B$ とすると，上の議論より，X の開集合 O_b, O_A で，

$$b \in O_b, \quad A \subset O_A, \quad O_b \cap O_A = \emptyset$$

となるものが存在する．このとき，$(X \setminus B) \cup (O_b)_{b \in B}$ は X の開被覆．よって，上と同様の議論により，A と B は開集合により分離される．したがって，X は正規．すなわち，パラコンパクト Hausdorff 空間は正規． □

パラコンパクト性の重要性は次に述べる 1 の分割の存在を保証することにある．

定義　X を位相空間とする．

f を X で定義された実数値連続関数とする．このとき，

$$\mathrm{supp}\,(f) = \overline{\{x \in X | f(x) \neq 0\}}$$

により定められる X の部分集合 $\mathrm{supp}\,(f)$ を f の台という．

$(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を X で定義された実数値連続関数の族とする．次の (1)〜(3) がなりたつとき，$(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を X における 1 の分割，1 の分解，単位の分割または単位の分解という．

(1) 任意の $\lambda \in \Lambda$ および任意の $x \in X$ に対して，$0 \leq f_\lambda(x) \leq 1$.

(2) $(\mathrm{supp}\,(f_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ は局所有限な X の被覆．

(3) 任意の $x \in X$ に対して，$\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x) = 1$.

$(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を X の開被覆，$(f_\mu)_{\mu \in M}$ を X における 1 の分割とする．$(\mathrm{supp}\,(f_\mu))_{\mu \in M}$ が $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の細分となるとき，$(f_\mu)_{\mu \in M}$ は $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に従属するという．

注意　上の 1 の分割の定義において，(2) より，各 $x \in X$ に対して，$f_\lambda(x)$ は有限個の $\lambda \in \Lambda$ を除いて 0 である．よって，(3) の和は実質的には有限和である．

上の定理より，パラコンパクト Hausdorff 空間に対して，§8 において紹介した Urysohn の補題がなりたつ．そして，次を示すことができる．

定理　パラコンパクト Hausdorff 空間の任意の開被覆に対して，それに従属する 1 の分割が存在する．

問題 10

1. $n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$$

とおく.

(1) $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ を $\mathbf{R}$ の部分集合族とみなすとき, $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は局所有限ではないことを示せ.

(2) $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ を $\mathbf{R}$ の部分空間 $(0,1)$ の部分集合族とみなすとき, $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は局所有限であることを示せ.

2. X を位相空間, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の部分集合族とする.

(1) $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が局所有限ならば,

$$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{U_\lambda} \tag{$*$}$$

がなりたつことを示せ.

(2) $X = \mathbf{R}$, $\Lambda = \mathbf{N}$ とし,

$$U_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$$

とおく. このとき, $(*)$ の両辺を求めよ.

3. X をパラコンパクト空間, A を X の部分空間とする. A が X の閉集合ならば, A はパラコンパクトであることを示せ.

4. 第二可算公理をみたす位相空間は Lindelöf であることを示せ. 特に, 第二可算公理をみたす局所コンパクト Hausdorff 空間はパラコンパクトとなる.

問題 10 の解答

1. (1) 背理法により示す.

$\mathbf{R}$ の部分集合族 $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が局所有限であると仮定する. このとき, $0 \in \mathbf{R}$ のある近傍 U が存在し,

$$U \cap I_n \neq \emptyset$$

となる $n \in \mathbf{N}$ は有限個. ここで, ある $\varepsilon > 0$ が存在し, $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U$. 更に, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $\frac{1}{N} < \varepsilon$. よって, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば,

$$\frac{1}{n+1} \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap I_n.$$

これは矛盾. したがって, $\mathbf{R}$ の部分集合族 $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は局所有限ではない.

(2) $x \in (0,1)$ とすると, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し,

$$\frac{1}{N+1} \leq x < \frac{1}{N}.$$

よって, $\left(\frac{1}{N+2}, \frac{1}{N}\right)$ は $(0,1)$ における x の近傍で, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N+2$ ならば,

$$\left(\frac{1}{N+2}, \frac{1}{N}\right) \cap I_n = \emptyset.$$

したがって, $(0,1)$ の部分集合族 $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は局所有限.

2. (1) まず,

$$U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

とおき, $x \in \overline{U}$ とする. $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は局所有限だから, x のある近傍 V が存在し,

$$V \cap U_\lambda \neq \emptyset$$

となる $\lambda \in \Lambda$ は有限個. このような λ に対する U_λ を単に $U_1, U_2, \ldots, U_n$ と表す. ここで, 任意の $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $x \notin \overline{U_i}$ であると仮定する. このとき,

$$W = U \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}\right)$$

とおくと, W は x の近傍で, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して,

$$W \cap U_\lambda = \emptyset.$$

よって,

$$\begin{aligned} W \cap U &= W \cap \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \\ &= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (W \cap U_\lambda) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

すなわち, $W \cap U = \emptyset$ だから, x は U の外点. これは矛盾. したがって, ある $i = 1, 2, \ldots, n$

に対して, $x \in \overline{U_i}$ となるから,

$$\overline{U} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{U_\lambda}.$$

逆に, 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して, $U_\lambda \subset U$. よって, $\overline{U_\lambda} \subset \overline{U}$ だから,

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{U_\lambda} \subset \overline{U}.$$

以上より, $(*)$ がなりたつ.

(2) まず,

$$\begin{aligned}\overline{\bigcup_{n \in \mathbf{N}} U_n} &= \overline{\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]} \\ &= \overline{(-1, 1)} \\ &= [-1, 1].\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \overline{U_n} &= \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \overline{\left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] \\ &= (-1, 1).\end{aligned}$$

3. $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を A の開被覆とする. 相対位相の定義より, 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して, X のある開集合 U'_λ が存在し,

$$U_\lambda = U'_\lambda \cap A.$$

A は X の閉集合だから, $(X \setminus A) \cup (U'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は X の開被覆. ここで, X はパラコンパクトだから, $(X \setminus A) \cup (U'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の細分となる局所有限な X の開被覆 $(V_\mu)_{\mu \in M}$ が存在する. このとき, $(V_\mu \cap A)_{\mu \in M}$ は $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の細分となる局所有限な A の開被覆. よって, A はパラコンパクト.

4. X を第二可算公理をみたす位相空間, $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を X の開被覆とする. X は第二可算公理をみたすから, 高々可算個の元からなる X の位相の基底 $\mathfrak{B}$ が存在する. ここで, $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$ を

$$\mathfrak{B}' = \{U \in \mathfrak{B} \mid \text{ある } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } U \subset O_\lambda\}$$

により定める. 選択公理により, 各 $U \in \mathfrak{B}'$ に対して, $U \subset O_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ を選んでおき, この O_λ を O_U とおく. このとき, $(O_U)_{U \in \mathfrak{B}'}$ は $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の高々可算部分集合.

ここで, $x \in X$ とすると, $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は X の開被覆だから, ある $\lambda \in \Lambda$ が存在し, $x \in O_\lambda$. 更に, $\mathfrak{B}$ は X の位相の基底だから, ある $U \in \mathfrak{B}$ が存在し,

$$x \in U \subset O_\lambda.$$

よって, $U \in \mathfrak{B}'$ だから, $U \subset O_U$. したがって, $x \in O_U$ となるから, $(O_U)_{U \in \mathfrak{B}'}$ は X の開被覆. 以上より, X は Lindelöf.