

### §11. 位相空間のコンパクト化

位相空間について調べる際に、その空間をコンパクトなものへ埋め込んで考えることがある。まず、次のように定める。

**定義**  $X, \hat{X}$  を位相空間、 $\iota$  を  $X$  から  $\hat{X}$  への写像とする。次の (1)~(3) がなりたつとき、組  $(\hat{X}, \iota)$  または  $\hat{X}$  を  $X$  のコンパクト化という。

- (1)  $\hat{X}$  はコンパクト。
- (2)  $\iota$  の値域を  $\iota(X)$  へ制限して得られる  $X$  から  $\iota(X)$  への写像は同相写像。
- (3)  $\iota(X)$  は  $\hat{X}$  において稠密。

**注意** 上の定義の (2) において、 $\iota(X)$  の位相は  $\hat{X}$  の位相に関する相対位相を考えている。

また、(2) をみたく  $\iota$  を中への同相写像または埋め込みという。

**例** 开区間  $(a, b)$  から閉区間  $[a, b]$  への写像  $\iota$  を

$$\iota(x) = x \quad (x \in (a, b))$$

により定める。このとき、 $([a, b], \iota)$  は  $(a, b)$  のコンパクト化である。

一つの位相空間に対するコンパクト化には様々なものが考えられるが、ここでは、新たに1点を付け加えることにより得られるコンパクト化について述べよう。

まず、上の定義の (1) の条件について考える。 $(X, \mathfrak{D})$  を位相空間とし、 $X$  の元ではない点  $\{\infty\}$  を  $X$  に付け加えて得られる集合を  $\hat{X}$  とする。すなわち、

$$\hat{X} = X \cup \{\infty\}$$

である。 $\infty$  を無限遠点という。ここで、 $\hat{X}$  の部分集合系  $\hat{\mathfrak{D}}$  を

$$\hat{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D} \cup \{O \mid \infty \in O \text{ で } \hat{X} \setminus O \text{ は } X \text{ のコンパクト閉集合}\}$$

により定める。このとき、次がなりたつ。

**定理**  $\hat{\mathfrak{D}}$  は  $\hat{X}$  の位相。

**証明** まず、 $\infty \in \hat{X}$  で、 $\hat{X} \setminus \hat{X} = \emptyset$  は  $X$  のコンパクト閉集合。よって、 $\hat{X} \in \hat{\mathfrak{D}}$ 。また、 $\emptyset \in \mathfrak{D}$  だから、 $\emptyset \in \hat{\mathfrak{D}}$ 。

次に、 $O_1, O_2 \in \hat{\mathfrak{D}}$  とする。 $\infty \in O_1 \cap O_2$  のとき、 $\infty \in O_1$  だから、 $\hat{X} \setminus O_1$  は  $X$  のコンパクト閉集合。同様に、 $\hat{X} \setminus O_2$  は  $X$  のコンパクト閉集合。更に、de Morgan の法則より、

$$\hat{X} \setminus (O_1 \cap O_2) = (\hat{X} \setminus O_1) \cup (\hat{X} \setminus O_2)$$

だから、 $\hat{X} \setminus (O_1 \cap O_2)$  は  $X$  のコンパクト閉集合。よって、 $O_1 \cap O_2 \in \hat{\mathfrak{D}}$ 。また、 $\infty \notin O_1 \cap O_2$  のとき、

$$O_1 \cap O_2 = (O_1 \cap X) \cap (O_2 \cap X).$$

ここで、 $A \subset \hat{X}$  に対して、

$$A \cap X = X \setminus (X \setminus A)$$

だから、 $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{D}$ 。よって、 $O_1 \cap O_2 \in \hat{\mathfrak{D}}$ 。

更に,  $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  を  $\hat{\mathcal{D}}$  の元からなる集合族とする.  $\infty \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$  のとき, ある  $\lambda_0 \in \Lambda$  に対して,  $\infty \in O_{\lambda_0}$ . このとき,  $\hat{X} \setminus O_{\lambda_0}$  は  $X$  のコンパクト閉集合で, de Morgan の法則より,

$$\hat{X} \setminus \left( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \right) = \left( \hat{X} \setminus O_{\lambda_0} \right) \cap \left( \bigcap_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq \lambda_0}} \left( \hat{X} \setminus O_\lambda \right) \right)$$

だから,  $\hat{X} \setminus \left( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \right)$  は  $X$  のコンパクト閉集合. よって,  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \hat{\mathcal{D}}$ . また,  $\infty \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$  のとき, 任意の  $\lambda \in \Lambda$  に対して,  $O_\lambda \in \mathcal{D}$ . よって,  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{D}$ . したがって,  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \hat{\mathcal{D}}$ .

以上より,  $\hat{\mathcal{D}}$  は  $\hat{X}$  の位相. □

以下, 上のように定めた  $\hat{X}$  を考え,  $\hat{X}$  の位相としては  $\hat{\mathcal{D}}$  を考える. このとき, 次がなりたつ.

**定理**  $\hat{X}$  はコンパクト.

**証明**  $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  を  $\hat{X}$  の開被覆とする. このとき, ある  $\lambda_0 \in \Lambda$  が存在し,  $\infty \in O_{\lambda_0}$ .  $\hat{\mathcal{D}}$  の定義より,  $\hat{X} \setminus O_{\lambda_0}$  は  $X$  のコンパクト部分集合. 更に,  $(O_\lambda \cap X)_{\lambda \in \Lambda}$  は  $\hat{X} \setminus O_{\lambda_0}$  の開被覆となるから,  $(O_\lambda \cap X)_{\lambda \in \Lambda}$  の有限部分被覆  $(O_{\lambda_i} \cap X)_{i=1,2,\dots,n}$  が存在する. よって,

$$\hat{X} \setminus O_{\lambda_0} \subset \bigcup_{i=1}^n (O_{\lambda_i} \cap X).$$

したがって,  $(O_{\lambda_i})_{i=0,1,2,\dots,n}$  は  $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  の有限部分被覆となるから,  $\hat{X}$  はコンパクト. □

次に, 上の定義の (2) の条件について考えよう.  $X$  から  $\hat{X}$  への写像  $\iota$  を

$$\iota(x) = x \quad (x \in X)$$

により定める.  $X$  は自然に  $\hat{X}$  の部分集合とみなすことができるので,  $\iota$  は  $X$  から  $\hat{X}$  への包含写像に他ならない. このとき, 次がなりたつ.

**定理**  $\iota$  は埋め込み.

**証明**  $\iota$  の定義より,  $\iota$  は  $X$  から  $\iota(X)$  への全単射を定める.

次に,  $O \in \hat{\mathcal{D}}$  とすると,

$$\begin{aligned} \iota^{-1}(O \cap X) &= O \cap X \\ &\in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

すなわち,  $\iota^{-1}(O \cap X) \in \mathcal{D}$ . よって,  $\iota$  は  $X$  から  $\iota(X)$  への連続写像を定める.

逆に,  $O \in \mathcal{D}$  とすると,

$$\iota(O) = O \cap X.$$

よって,  $\hat{\mathcal{D}}$  および相対位相の定義より,  $\iota(O)$  は  $\iota(X)$  の開集合. したがって,  $\iota$  の値域を  $\iota(X)$  へ制限して得られる  $X$  から  $\iota(X)$  への写像の逆写像は連続.

以上より,  $\iota$  は埋め込み. □

上の定義の (3) の条件については, 次がなりたつ.

**定理** 次の (1), (2) は同値.

- (1)  $\iota(X)$  は  $\hat{X}$  において稠密.  
 (2)  $X$  はコンパクトではない.

**証明**  $\hat{X}$  の空でない部分集合  $O$  に対して,

$$O \cap X = \emptyset$$

となるのは,  $O = \{\infty\}$  のとき. また,  $\{\infty\}$  が  $\hat{X}$  の開集合となるのは  $\hat{\mathcal{D}}$  の定義より,  $X$  がコンパクトのとき. よって, (1) と (2) は同値.  $\square$

以上より, 次のように定める.

**定義**  $X$  をコンパクトでない位相空間とし,  $\hat{X}$  を上のように定めて得られる位相空間とする. このとき,  $\hat{X}$  を  $X$  の一点コンパクト化または Alexandrov のコンパクト化という.

更に,  $\hat{X}$  が Hausdorff になるための条件について述べよう.

**定理** 次の (1), (2) は同値.

- (1)  $X$  は局所コンパクト Hausdorff.  
 (2)  $\hat{X}$  は Hausdorff.

**証明** (1)  $\Rightarrow$  (2):  $X$  は Hausdorff だから,  $x \in X$  と  $\infty$  が開集合により分離されることを示せばよい.  $X$  は局所コンパクトだから,  $X$  における  $x$  のコンパクトな近傍  $U$  が存在する. このとき,  $x \in U^i$ . 一方,  $X$  は Hausdorff だから,  $U$  は  $X$  の閉集合. よって,  $\hat{\mathcal{D}}$  の定義より,  $(X \setminus U) \cup \{\infty\}$  は  $\{\infty\}$  を含む  $\hat{X}$  の開集合. 更に,

$$U^i \cap ((X \setminus U) \cup \{\infty\}) = \emptyset.$$

したがって,  $x \in X$  と  $\infty$  は開集合により分離される.

(2)  $\Rightarrow$  (1):  $\hat{X}$  はコンパクト Hausdorff だから,  $\hat{X}$  は局所コンパクト Hausdorff. 更に,  $X$  は  $\hat{X}$  の開集合だから,  $X$  は局所コンパクト Hausdorff.  $\square$

**注意**  $X$  が局所コンパクト Hausdorff なとき,  $X$  のコンパクト化となり, Hausdorff となる  $\hat{X}$  の位相は  $\hat{\mathcal{D}}$  のみであることが分かる.

**例**  $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$  を

$$S^n = \{y \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|y\| = 1\}$$

により定める.  $S^n$  を  $n$  次元単位球面という. 特に,  $n = 1$  のときは  $S^1$  は原点中心, 半径 1 の円である. 定義より,  $S^n$  は  $\mathbf{R}^{n+1}$  の有界閉集合であるから,  $S^n$  はコンパクトである.

$x \in \mathbf{R}^n$  に対して,  $\mathbf{R}^{n+1}$  の 2 点  $(x, 0)$  と  $(0, 1)$  を通る直線が  $S^n$  と交わる点を  $f(x)$  とおくと,  $f$  は  $\mathbf{R}^n$  から  $S^n$  への写像を定める. このとき,

$$f(S^n) = S^n \setminus \{(0, 1)\}$$

で,  $S^n$  は  $\mathbf{R}^n$  の一点コンパクト化と同相となることが分かる. 特に, 無限遠点  $\infty$  は  $(0, 1)$  に対応する.  $(0, 1)$  を北極,  $f$  の値域を  $S^n \setminus \{(0, 1)\}$  へ制限して得られる  $\mathbf{R}^n$  から  $S^n \setminus \{(0, 1)\}$  への写像の逆写像を北極を中心とする立体射影という.

## 問題 11

1. 連結空間のコンパクト化は連結であることを示せ.
2.  $X, Y$  をコンパクトでない位相空間,  $f$  を  $X$  から  $Y$  への同相写像とする. このとき,  $X$  の一点コンパクト化  $\hat{X}$  から  $Y$  の一点コンパクト化  $\hat{Y}$  への写像  $\tilde{f}$  を

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in X), \\ \infty_Y & (x = \infty_X) \end{cases}$$

により定める. ただし,  $\infty_X, \infty_Y$  はそれぞれ  $\hat{X}, \hat{Y}$  の無限遠点である.  $\tilde{f}$  は同相写像であることを示せ.

3.  $x \in \mathbf{R}^n$  に対して,  $\mathbf{R}^{n+1}$  の 2 点  $(x, 0)$  と  $(0, 1)$  を通る直線が  $n$  次元単位球面  $S^n$  と交わる点を  $f(x)$  とおく.
  - (1)  $f(x)$  を  $x$  の式で表せ.
  - (2)  $p$  を北極を中心とする立体射影とする.  $y \in S^n \setminus \{(0, 1)\}$  を

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$$

と表すとき,  $p(y)$  を  $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$  の式で表せ.

4.  $x, y \in S^n$  に対して,  $y = \pm x$  であるとき,  $x \sim y$  と表す.
  - (1)  $\sim$  は  $S^n$  上の同値関係であることを示せ.  $S^n$  の  $\sim$  による商集合を  $\mathbf{R}P^n$  と表し,  $n$  次元実射影空間という.
  - (2)  $\pi$  を  $S^n$  から  $\mathbf{R}P^n$  への自然な射影とし,  $\mathbf{R}P^n$  の商位相を考える.  $\mathbf{R}P^n$  はコンパクトであることを示せ. なお,  $(\mathbf{R}P^n, \pi)$  は  $\mathbf{R}^n$  のコンパクト化となることが分かる.

## 問題 11 の解答

1.  $X$  を連結空間,  $(\hat{X}, \iota)$  を  $X$  のコンパクト化とする.  $\hat{X}$  の開集合  $U, V$  に対して,

$$\hat{X} = U \cup V, \quad U \cap V = \emptyset$$

がなりたつとする. 相対位相の定義より,  $\iota(X) \cap U, \iota(X) \cap V$  は  $\hat{X}$  の部分空間  $\iota(X)$  の開集合で,

$$\iota(X) = (\iota(X) \cap U) \cup (\iota(X) \cap V), \quad (\iota(X) \cap U) \cap (\iota(X) \cap V) = \emptyset.$$

$X$  は連結だから, コンパクト化の定義より,  $\iota(X)$  は連結. よって,

$$\iota(X) \cap U = \emptyset$$

または

$$\iota(X) \cap V = \emptyset.$$

このとき, 前者がなりたつとしてよい.  $U \neq \emptyset$  であると仮定すると,  $U$  の内点が存在する. コンパクト化の定義より,  $\iota(X)$  は  $X$  において稠密だから, これは矛盾. したがって,  $U = \emptyset$  だから,  $\hat{X}$  は連結. すなわち, 連結空間のコンパクト化は連結.

2.  $f$  は全単射だから,  $\tilde{f}$  の定義より,  $\tilde{f}$  は全単射. 更に,  $f$  は同相写像だから,  $\tilde{f}$  が連続であることを示せばよい.

$O$  を  $\hat{Y}$  の開集合とする.  $\hat{Y}$  の位相の定義より,  $O$  は  $Y$  の開集合, または  $\infty_Y \in O$  かつ  $\hat{Y} \setminus O$  は  $Y$  のコンパクト閉集合.

$O$  が  $Y$  の開集合のとき,  $f$  は連続だから,  $\tilde{f}^{-1}(O) = f^{-1}(O)$  は  $X$  の開集合.

$\infty_Y \in O$  かつ  $\hat{Y} \setminus O$  が  $Y$  のコンパクト閉集合のとき,

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{-1}(O) &= \tilde{f}^{-1}(\{\infty_Y\} \cup (O \cap Y)) \\ &= \tilde{f}^{-1}(\{\infty_Y\}) \cup \tilde{f}^{-1}(O \cap Y) \\ &= \{\infty_X\} \cup f^{-1}(O \cap Y). \end{aligned}$$

よって,  $\infty_X \in \tilde{f}^{-1}(O)$ . 更に,

$$\begin{aligned} \hat{X} \setminus \tilde{f}^{-1}(O) &= X \setminus f^{-1}(O \cap Y) \\ &= f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(O \cap Y) \\ &= f^{-1}(Y \setminus (O \cap Y)) \\ &= f^{-1}(\hat{Y} \setminus O). \end{aligned}$$

ここで,  $f$  は同相写像だから,  $f^{-1}(\hat{Y} \setminus O)$  は  $X$  のコンパクト閉集合. したがって,  $\tilde{f}^{-1}(O)$  は  $\hat{X}$  の開集合.

以上より,  $\tilde{f}$  は連続.

3. (1)  $(x, 0)$  と  $(0, 1)$  を通る直線の方程式は

$$y = t((x, 0) - (0, 1)) + (0, 1) \quad (t \in \mathbf{R}),$$

すなわち

$$y = (tx, 1 - t)$$

と表すことができる. これを  $S^n$  を定義する式に代入すると,

$$\|tx\|^2 + (1-t)^2 = 1.$$

これを解くと,

$$t = 0, \frac{2}{\|x\|^2 + 1}.$$

$t = 0$  のとき,  $f(x) = (0, 1)$  となるから,  $t \neq 0$ . よって,

$$t = \frac{2}{\|x\|^2 + 1}.$$

したがって,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left( \frac{2}{\|x\|^2 + 1} \cdot x, 1 - \frac{2}{\|x\|^2 + 1} \right) \\ &= \left( \frac{2x}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

(2) まず,

$$p(y) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

とおく. 北極を中心とする立体射影の定義と (1) より,

$$y_i = \frac{2x_i}{\|x\|^2 + 1} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad y_{n+1} = \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1}.$$

よって,

$$\|x\|^2 = \frac{1 + y_{n+1}}{1 - y_{n+1}}.$$

更に,

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{2} (\|x\|^2 + 1) y_i \\ &= \frac{y_i}{1 - y_{n+1}}. \end{aligned}$$

したがって,

$$p(y) = \left( \frac{y_1}{1 - y_{n+1}}, \frac{y_2}{1 - y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{1 - y_{n+1}} \right).$$

4. (1)  $x, y, z \in S^n$  とする.

まず,  $x = x$  だから,  $x \sim x$ . よって,  $\sim$  は反射律をみたす.

次に,  $x \sim y$  とすると,  $x = \pm y$ . よって,  $y = \pm x$  だから,  $y \sim x$ . したがって,  $\sim$  は対称律をみたす.

更に,  $x \sim y, y \sim z$  とする.  $x \sim y$  より,  $x = \pm y$ . また,  $y \sim z$  より,  $y = \pm z$ . よって,  $x = \pm z$  だから,  $x \sim z$ . したがって,  $\sim$  は推移律をみたす.

以上より,  $\sim$  は  $S^n$  上の同値関係.

(2) 商位相の定義より,  $\pi$  は連続な全射. また,  $S^n$  はコンパクト. よって,  $\pi(S^n) = \mathbf{R}P^n$  はコンパクト.