§12. 距離空間の完備化

§11 において, 位相空間をコンパクトなものへ埋め込みことについて述べたが, 距離空間は完備なものへ埋め込んで考えるのが有用である.

定義　$X, \tilde{X}$ を距離空間, ι を X から $\tilde{X}$ への写像とする. 次の (1)〜(3) がなりたつとき, 組 $(\tilde{X}, \iota)$ または $\tilde{X}$ を X の完備化または完備拡大という.

(1) $\tilde{X}$ は完備.
(2) ι は等長写像.
(3) $\iota(X)$ は $\tilde{X}$ において稠密.

注意　上の定義の (2) において, ι の値域を $\tilde{X}$ の部分距離空間 $\iota(X)$ へ制限して得られる X から $\iota(X)$ への写像は同相写像となる. 特に, ι は埋め込みである.

例　微分積分において学ぶように, $\mathbf{Q}$ は Euclid 距離に関して完備ではないが, $\mathbf{Q}$ を完備化して得られる距離空間が $\mathbf{R}$ である.

距離空間の完備化を具体的に構成しよう. まず, (X, d) を距離空間とし, X の Cauchy 列全体の集合を C_X と表す. $\mathbf{R}$ の完備性を用いることにより, 次を示すことができる.

定理　$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in C_X$ とすると, 実数列 $\{d(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.

証明　$m, n \in \mathbf{N}$ とすると, 三角不等式より,

$$d(x_m, y_m) \leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m).$$

すなわち,

$$d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \leq d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m).$$

同様に,

$$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n).$$

よって,

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m). \tag{$*$}$$

ここで, Cauchy 列の定義より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n \geq N$ ならば,

$$d(x_m, x_n), d(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

このとき, $(*)$ より,

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| < \varepsilon.$$

したがって, $\{d(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbf{R}$ の Cauchy 列. $\mathbf{R}$ は完備だから, $\{d(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する. □

次に, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in C_X$ に対して,

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = 0$$

となるとき, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ と表す. このとき, 次がなりたつことが容易に分かる.

定理　$\sim$ は C_X 上の同値関係.

また, 次がなりたつ.

定理 $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty, \{x'_n\}_{n=1}^\infty, \{y'_n\}_{n=1}^\infty \in C_X$ とする. $\{x_n\}_{n=1}^\infty \sim \{x'_n\}_{n=1}^\infty$ かつ $\{y_n\}_{n=1}^\infty \sim \{y'_n\}_{n=1}^\infty$ ならば,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n).$$

証明 $n \in \mathbf{N}$ とすると, 三角不等式より,

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n).$$

$n \to \infty$ とすると, 仮定より,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n).$$

同様に,

$$\lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

よって,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n).$$

□

ここで, C_X の $\sim$ による商集合を $\tilde{X}$ と表す. また, $\sim$ による $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in C_X$ の同値類を $[\{x_n\}_{n=1}^\infty]$ と表す. 上の定理より, $[\{x_n\}_{n=1}^\infty], [\{y_n\}_{n=1}^\infty] \in \tilde{X}$ に対して,

$$\tilde{d}([\{x_n\}_{n=1}^\infty], [\{y_n\}_{n=1}^\infty]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

とおくと, 左辺の値は代表元 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ の選び方に依存しない. よって, $\tilde{d}$ は $\tilde{X} \times \tilde{X}$ で定義された実数値関数を定める. このとき, 次がなりたつことが容易に分かる.

定理 $\tilde{d}$ は $\tilde{X}$ 上の距離.

更に, $x \in X$ に対して, X の点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ を

$$x_n = x \quad (n \in \mathbf{N})$$

により定める. このとき, 明らかに $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は X の Cauchy 列である. そこで,

$$\iota(x) = [\{x_n\}_{n=1}^\infty]$$

とおくことにより, X から $\tilde{X}$ への写像 ι を定めることができる.

以下, 上のように定めた距離空間 $(\tilde{X}, \tilde{d})$ と X から $\tilde{X}$ への写像 ι に対して, $\tilde{X}$ が X の完備化となることを示そう. まず, 最初の定義の (2) の条件から示す.

定理 ι は等長写像.

証明 $x, y \in X$ とすると,

$$\begin{aligned}\tilde{d}(\iota(x), \iota(y)) &= \lim_{n\to\infty} d(x, y)\\ &= d(x, y).\end{aligned}$$

すなわち,

$$\tilde{d}(\iota(x), \iota(y)) = d(x, y).$$

よって, ι は等長写像. □

次に, 最初の定義の (3) の条件を示す.

定理 $\iota(X)$ は $\tilde{X}$ において稠密.

証明 $[\{x_n\}_{n=1}^\infty] \in \tilde{X}$ とする. $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は X の Cauchy 列だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n \geq N$ ならば,

$$d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

このとき,

$$\begin{aligned}\tilde{d}(\iota(x_m), [\{x_n\}_{n=1}^\infty]) &= \lim_{n\to\infty} d(x_m, x_n) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

すなわち,

$$\tilde{d}(\iota(x_m), [\{x_n\}_{n=1}^\infty]) < \varepsilon.$$

よって, $[\{x_n\}_{n=1}^\infty] \in \overline{\iota(X)}$. $[\{x_n\}_{n=1}^\infty]$ は任意だから, $\overline{\iota(X)} = \tilde{X}$. すなわち, $\iota(X)$ は $\tilde{X}$ において稠密. □

更に, 最初の定義の (1) の条件を示そう.

定理 $\tilde{X}$ は完備.

証明 $\{\tilde{\xi}_n\}_{n=1}^\infty$ を $\tilde{X}$ の Cauchy 列とする. まず, $\iota(X)$ の稠密性より, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して, ある $x_n \in X$ が存在し,

$$\tilde{d}(\tilde{\xi}_n, \iota(x_n)) < \frac{1}{n}. \qquad (**)$$

$m, n \in \mathbf{N}$ とすると, ι の等長性, 三角不等式および $(**)$ より,

$$\begin{aligned}d(x_m, x_n) &= \tilde{d}(\iota(x_m), \iota(x_n)) \\ &\leq \tilde{d}(\iota(x_m), \tilde{\xi}_m) + \tilde{d}(\tilde{\xi}_m, \tilde{\xi}_n) + \tilde{d}(\tilde{\xi}_n, \iota(x_n)) \\ &< \frac{1}{m} + \tilde{d}(\tilde{\xi}_m, \tilde{\xi}_n) + \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

更に, $\{\tilde{\xi}_n\}_{n=1}^\infty$ は $\tilde{X}$ の Cauchy 列だから, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は X の Cauchy 列となる. よって, $[\{x_n\}_{n=1}^\infty] \in \tilde{X}$.

ここで, 三角不等式より,

$$\tilde{d}(\tilde{\xi}_n, [\{x_m\}_{m=1}^\infty]) \leq \tilde{d}(\tilde{\xi}_n, \iota(x_n)) + \tilde{d}(\iota(x_n), [\{x_m\}_{m=1}^\infty]).$$

したがって, $(**)$ と上の定理の証明より, $\{\tilde{\xi}_n\}_{n=1}^\infty$ は $[\{x_m\}_{m=1}^\infty]$ に収束する. すなわち, $\tilde{X}$ は完備. □

以上により, 距離空間の完備化を具体的に構成することができた. 更に, 完備化は次の意味で一意的であることが分かる.

定理 X を距離空間, $(\tilde{X}, \iota)$, $(\tilde{X}', \iota')$ を X の完備化とする. このとき, $\tilde{X}$ から $\tilde{X}'$ への全単射等長写像 f が存在し,

$$f \circ \iota = \iota'.$$

問題 12

1. $\mathbf{K}$ を $\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$, V を $\mathbf{K}$ 上のベクトル空間, $(V, \| \ \|)$ をノルム空間とし, d を $\| \ \|$ から自然に定まる V 上の距離とする. すなわち,

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in V)$$

である.

(1) 距離空間 (V, d) の Cauchy 列全体の集合を C_V と表す. $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty \in C_V$ ならば, $\{x_n + y_n\}_{n=1}^\infty \in C_V$ であることを示せ.

(2) $c \in \mathbf{K}$, $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in C_V$ ならば, $\{cx_n\}_{n=1}^\infty \in C_V$ であることを示せ.

(3) $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty \in C_V$ に対して,

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = 0$$

となるとき, $\{x_n\}_{n=1}^\infty \sim \{y_n\}_{n=1}^\infty$ と表すと, $\sim$ は V 上の同値関係となる. C_V の $\sim$ による商集合を $\tilde{V}$ と表す.

$\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty, \{x'_n\}_{n=1}^\infty, \{y'_n\}_{n=1}^\infty \in C_V$ とする. $\{x_n\}_{n=1}^\infty \sim \{x'_n\}_{n=1}^\infty$ かつ $\{y_n\}_{n=1}^\infty \sim \{y'_n\}_{n=1}^\infty$ ならば,

$$\{x_n + y_n\}_{n=1}^\infty \sim \{x'_n + y'_n\}_{n=1}^\infty$$

であることを示せ.

(4) $c \in \mathbf{K}$, $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{x'_n\}_{n=1}^\infty \in C_V$ とする. $\{x_n\}_{n=1}^\infty \sim \{x'_n\}_{n=1}^\infty$ ならば,

$$\{cx_n\}_{n=1}^\infty \sim \{cx'_n\}_{n=1}^\infty$$

であることを示せ.

$\sim$ による $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in C_X$ の同値類を $[\{x_n\}_{n=1}^\infty]$ と表す. (3), (4) より, $[\{x_n\}_{n=1}^\infty], [\{y_n\}_{n=1}^\infty] \in \tilde{V}$, $c \in \mathbf{K}$ に対して,

$$[\{x_n\}_{n=1}^\infty] + [\{y_n\}_{n=1}^\infty], c[\{x_n\}_{n=1}^\infty] \in \tilde{V}$$

を

$$[\{x_n\}_{n=1}^\infty] + [\{y_n\}_{n=1}^\infty] = [\{x_n + y_n\}_{n=1}^\infty], \quad c[\{x_n\}_{n=1}^\infty] = [\{cx_n\}_{n=1}^\infty]$$

により定めると, $\tilde{V}$ は $\mathbf{K}$ 上のベクトル空間となる. また, $[\{x_n\}_{n=1}^\infty], [\{y_n\}_{n=1}^\infty] \in \tilde{V}$ に対して,

$$\tilde{d}([\{x_n\}_{n=1}^\infty], [\{y_n\}_{n=1}^\infty]) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n)$$

とおくと, $\tilde{d}$ は $\tilde{V}$ 上の距離で, $\tilde{V}$ は距離空間 V の完備化となる. 更に, $[\{x_n\}_{n=1}^\infty] \in \tilde{V}$ に対して,

$$\|[\{x_n\}_{n=1}^\infty]\|^\sim = \lim_{n \to \infty} \|x_n\|$$

とおくと, $\| \ \|^\sim$ は $\tilde{V}$ のノルムとなる. ノルム空間 $(\tilde{V}, \| \ \|^\sim)$ をノルム空間 $(V, \| \ \|)$ の完備化という.

問題 12 の解答

1. (1) $\varepsilon > 0$ とする. $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は Cauchy 列だから, ある $N_1 \in \mathbf{N}$ が存在し, $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n \geq N_1$ ならば,

$$d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

また, $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ は Cauchy 列だから, ある $N_2 \in \mathbf{N}$ が存在し, $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n \geq N_2$ ならば,

$$d(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

よって, $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n \geq \max\{N_1, N_2\}$ ならば, 三角不等式より,

$$\begin{aligned} d(x_m + y_m, x_n + y_n) &= \|(x_m + y_m) - (x_n + y_n)\| \\ &= \|(x_m - x_n) + (y_m - y_n)\| \\ &\leq \|x_m - x_n\| + \|y_m - y_n\| \\ &= d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

すなわち,

$$d(x_m + y_m, x_n + y_n) < \varepsilon.$$

したがって, $\{x_n + y_n\}_{n=1}^\infty$ は V の Cauchy 列. すなわち, $\{x_n + y_n\}_{n=1}^\infty \in C_V$.

(2) $c = 0$ のとき,

$$cx_n = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$$

だから, $\{cx_n\}_{n=1}^\infty$ は明らかに V の Cauchy 列. すなわち, $\{cx_n\}_{n=1}^\infty \in C_V$.

$c \neq 0$ のとき, $\varepsilon > 0$ とする. $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は Cauchy 列だから, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n \geq N$ ならば,

$$d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

このとき,

$$\begin{aligned} d(cx_m, cx_n) &= \|cx_m - cx_n\| \\ &= \|c(x_m - x_n)\| \\ &= |c|\|x_m - x_n\| \\ &= |c| d(x_m, x_n) \\ &< |c| \frac{\varepsilon}{|c|} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

すなわち,

$$d(cx_m, cx_n) < \varepsilon.$$

よって, $\{cx_n\}_{n=1}^\infty$ は V の Cauchy 列. すなわち, $\{cx_n\}_{n=1}^\infty \in C_V$.

(3) $n \in \mathbf{N}$ とすると, 三角不等式より,

$$\begin{aligned} d(x_n + y_n, x'_n + y'_n) &= \|(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n)\| \\ &= \|(x_n - x'_n) + (y_n - y'_n)\| \\ &\leq \|x_n - x'_n\| + \|y_n - y'_n\| \\ &= d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n). \end{aligned}$$

ここで, 仮定より,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} d(y_n, y'_n) = 0.$$

よって,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n + y_n, x'_n + y'_n) = 0.$$

したがって,

$$\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{x'_n + y'_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

(4) $n \in \mathbf{N}$ とすると,

$$\begin{aligned} d(cx_n, cx'_n) &= \|cx_n - cx'_n\| \\ &= \|c(x_n - x'_n)\| \\ &= |c|\|x_n - x'_n\| \\ &= |c| d(x_n, x'_n). \end{aligned}$$

ここで, 仮定より,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0.$$

よって,

$$\lim_{n\to\infty} d(cx_n, cx'_n) = 0.$$

したがって,

$$\{cx_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{cx'_n\}_{n=1}^{\infty}.$$