§1. 多様体

ここでは準備として, 多様体の定義などについて簡単に述べよう. なお, 以下に現れる n 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ に対しては Euclid 距離から定まる通常の位相を考えることとする. また, 部分集合の位相については相対位相を考えることとする.
まずは位相多様体の定義から始めよう.

定義 M を Hausdorff 空間とする. M の任意の点が $\mathbf{R}^n$ の開集合と同相な近傍をもつとき, すなわち任意の $p \in M$ に対して, p の近傍 U, $\mathbf{R}^n$ の開集合 U', U から U' への全単射な連続写像 φ が存在し φ^{-1} も連続なとき, M を n 次元位相多様体という.
このとき, 組 (U, φ) を M の座標近傍, φ を U 上の局所座標系という.
また,

$$\varphi(p) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表しておくとき, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を p の局所座標という.

M を n 次元位相多様体とする.
位相多様体の定義より, M の座標近傍からなる集合族 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が存在し,

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

と表すことができる. $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を M の座標近傍系という.
ここで, (U, φ), (V, ψ) を M の座標近傍とし, $U \cap V \neq \emptyset$ であると仮定しよう.
このとき, φ は M の開集合 $U \cap V$ から $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\varphi(U \cap V)$ への同相写像

$$\varphi : U \cap V \to \varphi(U \cap V)$$

を定める. この写像は正確には制限写像の記号を用いて $\varphi|_{U \cap V}$ と表すべきであるが, 煩雑さを避けるため単に φ と表すことにする.
同様に, ψ は M の開集合 $U \cap V$ から $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\psi(U \cap V)$ への同相写像

$$\psi : U \cap V \to \psi(U \cap V)$$

を定める.
よって, $\psi \circ \varphi^{-1}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\varphi(U \cap V)$ から $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\psi(U \cap V)$ への同相写像

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

を定め, $\varphi \circ \psi^{-1}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\psi(U \cap V)$ から $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\varphi(U \cap V)$ への同相写像

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

を定める. $\psi \circ \varphi^{-1}$ を (U, φ) から (V, ψ) への座標変換, $\varphi \circ \psi^{-1}$ を (V, ψ) から (U, φ) への座標変換という.
座標変換は $\mathbf{R}^n$ の開集合から $\mathbf{R}^n$ の開集合への写像であるから, 微分可能性を考えることができる. このことを用いると, 微分可能多様体を定義することができる.

定義 $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ とする. M を n 次元位相多様体, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を M の座標近傍系とし, $\mathcal{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ とおく. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ となる任意の $\alpha, \beta \in A$ に対して座標変換

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

が C^r 級のとき, 組 $(M, \mathcal{S})$ または単に M を n 次元 C^r 級微分可能多様体または単に C^r 級多様体という.
このとき, $\mathcal{S}$ を C^r 級座標近傍系という.

例 (Euclid 空間)
n 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ は n 次元 C^∞ 級多様体である.
実際, $\mathbf{R}^n$ は Hausdorff で, $1_{\mathbf{R}^n}$ を $\mathbf{R}^n$ の恒等写像とすると, $\{(\mathbf{R}^n, 1_{\mathbf{R}^n})\}$ が C^∞ 級座標近傍系となる.

簡単のため, 以下では多様体やその他の概念は C^∞ 級のものを主に考えることにする.

定義 $(M, \mathcal{S}), (N, \mathcal{T})$ を C^∞ 級多様体, f を M から N への写像とし, $p \in M$ とする. $f(p) \in V$ となる任意の $(V, \psi) \in \mathcal{T}$ と $p \in U \subset f^{-1}(V)$ となる任意の $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ に対して, $\varphi(U)$ から $\psi(V)$ への写像

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

が $\varphi(p)$ において C^∞ 級のとき, f は p において C^∞ 級であるという.
任意の $p \in M$ に対して, f が p において C^∞ 級のとき, f は C^∞ 級であるという.
M から N への C^∞ 級写像全体の集合を $C^\infty(M, N)$ と表す.

p において C^∞ 級であるという定義は座標近傍の選び方に依存しないことに注意しよう.

例 (C^∞ 級関数)
M を C^∞ 級多様体とする.
一方, $\mathbf{R}$ は 1 次元 C^∞ 級多様体である.
M から $\mathbf{R}$ への C^∞ 級写像を M 上の C^∞ 級関数といい,

$$C^\infty(M, \mathbf{R}) = C^\infty(M)$$

と表す.

例 (C^∞ 級曲線)
開区間 (a, b) は 1 次元 C^∞ 級多様体である.
特に, (a, b) は $\mathbf{R}$ の開部分多様体というものである.
ここで, M を C^∞ 級多様体とする.
(a, b) から M への C^∞ 級写像を C^∞ 級曲線という.

次に, 接ベクトルおよび接空間について述べよう.
$(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^∞ 級多様体とする. また, $p \in M$ とし, $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ を $p \in U$ となるように選んでおく. 更に, $\varepsilon > 0$ とし,

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

を $\gamma(0) = p$ で, 像が U に含まれるような C^∞ 級曲線とする.
f を p の近傍で定義された C^∞ 級関数とし,

$$v_\gamma(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \gamma)$$

とおく. f から $v_\gamma(f)$ への対応を γ に沿う $t = 0$ における方向微分という. また, $v_\gamma(f)$ を f の $t = 0$ における γ 方向の微分係数という.
φ を

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表しておくと,

$$v_\gamma(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p))\dot{x}_i(0)$$

が得られる.

定理　M を C^∞ 級多様体とする. $p \in M$ とし, γ を $\gamma(0) = p$ となる 0 を含む開区間で定義された M 上の C^∞ 級曲線とする. $a, b \in \mathbf{R}$ とし, f, g を p の近傍で定義された C^∞ 級関数とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $v_\gamma(af + bg) = av_\gamma(f) + bv_\gamma(g)$.
(2) $v_\gamma(fg) = v_\gamma(f)g(p) + f(p)v_\gamma(g)$.

なお, 接ベクトルは上の定理の (1), (2) の性質を用いて定義することもある.
更に, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して f から $\dfrac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p))$ への対応を $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ と表すことにする.
このとき,

$$v_\gamma(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) f = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i(0)\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

と表すことができる.
そこで, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

を p における接ベクトルという. 特に, 上の v_γ は p の接ベクトルで,

$$v_\gamma = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

と表すことができる.
M 上の曲線を用いなくとも, 接ベクトルは方向微分を定める. すなわち, f から

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

への対応を定めることができる.
p における接ベクトル全体の集合を T_pM と表す. すなわち,

$$T_pM = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \,\middle|\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R} \right\}$$

である. T_pM は自然にベクトル空間となる. T_pM を p における接ベクトル空間または接空間という.

定理　$\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \ldots, \left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ は 1 次独立.
特に, これらは T_pM の基底となり, T_pM は n 次元ベクトル空間である.

関連事項 1. 多様体の分類

位相空間論において同相な位相空間は同じとみなすように, 多様体論においては微分同相な多様体は同じとみなすことが多い.
M, N を C^∞ 級多様体, f を M から N への写像とする. 次の (1), (2) がなりたつとき, f を C^∞ 級微分同相写像といい, M と N は C^∞ 級微分同相であるという.

(1) f は全単射.
(2) $f \in C^\infty(M, N)$ かつ $f^{-1} \in C^\infty(N, M)$.

例えば, 原点中心, 半径 1 の円は S^1 と表すが, 原点が中心でなくても半径が 1 でなくても, すべての円は互いに C^∞ 級微分同相である. よって, これらは多様体論の立場からは互いに同一視し, 同じ S^1 という記号で表すことが多い.
微分同相な多様体を同一視し, それらを分類することは多様体論における基本的な問題である. ここでは, 多様体の次元が 1 または 2 の場合について簡単に述べよう. なお, 多様体を扱う場合にしばしば仮定されるパラコンパクト性はここでも仮定しておこう.
X を位相区間, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を X の部分集合族とする. 任意の $p \in X$ に対して p の近傍 U が存在し, $U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ となる α の個数が有限個であるとき, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ は局所有限であるという. また, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ および $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をともに X の被覆とし, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $V_\lambda \subset U_\alpha$ となる α が存在するとき, $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ の細分という. 更に, X は Hausdorff で, 任意の開被覆に対してその細分となる局所有限な開被覆が存在するとき, パラコンパクトであるという.
多様体の分類を考える際には, 連結成分に分けておけばよい.
1 次元連結 C^∞ 級多様体は境界付きのものも含めると,

$$\mathbf{R}, \ S^1, \ [0,1], \ (0,1]$$

の何れかと C^∞ 級微分同相である.
例えば, 開区間 $(0,1)$ は上には挙げられていないが,

$$f(x) = \tan \frac{\pi}{2}(2x-1) \quad (x \in (0,1))$$

とおくと, f は $(0,1)$ から $\mathbf{R}$ への C^∞ 級微分同相写像を定める.
上に挙げた 4 つの多様体の内, 境界のないものは $\mathbf{R}$ と S^1 で, $\mathbf{R}$ はコンパクトではないが, S^1 はコンパクトである.
また, $[0,1]$ の境界は $\{0,1\}$ で, $(0,1]$ の境界は $\{1\}$ である.
なお, パラコンパクトではない 1 次元連結 C^∞ 級多様体の例として, 長い直線や長い半直線というものが知られている.
2 次元 C^∞ 級多様体で, コンパクトで境界のないものを単に閉曲面ともいう. 閉曲面は向き付け可能なものとそうでないものとに分けることができる.
向き付け可能な閉曲面は球面に有限個の把手を付けたものと C^∞ 級微分同相であることが分かる. このとき, 付けた把手の数を種数という. 例えば, 種数 0 のものは球面で, 種数 1 のものはトーラスという S^1 と S^1 の直積で表される閉曲面である.
一方, 向き付け可能でない閉曲面も種数を用いて分類することができる. 実射影平面, すなわち 2 次元実射影空間や Klein の壷という閉曲面は向き付け可能ではない.