

§7. アファイン接続

§6において扱った Levi-Civita 接続はアファイン接続というものへ一般化することができる.

定義 M を C^∞ 級多様体とする. ∇ を $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\nabla_Y X \in \mathfrak{X}(M)$ を対応させる写像

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

とする. 任意の $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ と任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して次の (1)~(4) がなりたつとき, ∇ を M のアファイン接続という. また, $\nabla_Y X$ を X の Y に関する共変微分という.

$$(1) \nabla_{Y+Z} X = \nabla_Y X + \nabla_Z X.$$

$$(2) \nabla_{fY} X = f \nabla_Y X.$$

$$(3) \nabla_Z (X + Y) = \nabla_Z X + \nabla_Z Y.$$

$$(4) \nabla_Y (fX) = (Yf)X + f \nabla_Y X.$$

なお, (2) より, 各 $p \in M$ において ∇X は $T_p M$ の線形変換を定めることが分かる. よって, $v \in T_p M$ に対して $\nabla_v X \in T_p M$ を定めることができる.

M を C^∞ 級多様体, ∇ を M のアファイン接続とする.

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $T(X, Y) \in \mathfrak{X}(M)$ を

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

により定める.

ここで, $f, g \in C^\infty(M)$ とすると,

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

がなりたつ. 特に, $g = 1$ とし, (2), (4) を用いると,

$$\begin{aligned} T(fX, Y) &= \nabla_{fX} Y - \nabla_Y (fX) - [fX, Y] \\ &= f \nabla_X Y - \{(Yf)X + f \nabla_Y X\} - \{f[X, Y] - (Yf)X\} \\ &= fT(X, Y). \end{aligned}$$

同様に,

$$T(X, fY) = fT(X, Y).$$

これらのことより, T は各 $p \in M$ において双線形写像

$$T_p : T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$$

を定めることが分かる. このことを T は (1, 2) 型のテンソル場であるという.

また, T は交代的, すなわち

$$T(X, Y) = -T(Y, X)$$

をみtas. T を捩率テンソル場または単に捩率という. $T = 0$ となるとき, ∇ は捩れないなどという.

§6において扱った Levi-Civita 接続は次のように特徴付けることができる.

定理 (M, g) を C^∞ 級 Riemann 多様体とする. このとき, g に関して計量的で捩れない M のアファイン接続が一意的に存在する.

上の定理に現れたアファイン接続が Riemann 多様体の Levi-Civita 接続である。

次に、共変微分を座標近傍を用いて表してみよう。

M を n 次元 C^∞ 級多様体、 ∇ を M のアファイン接続、 (U, φ) を M の座標近傍とし、

$$\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

と表しておく。

このとき、 ∇ は U 上で

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (*)$$

と表すことができる。ただし、 Γ_{ij}^k ($i, j, k = 1, 2, \dots, n$) は U 上で定義された C^∞ 級関数である。 Γ_{ij}^k を Christoffel の記号という。

定理 ∇ が捩れの無いアファイン接続ならば、任意の $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ に対して

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

証明 $i, j = 1, 2, \dots, n$ とすると、仮定より、

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} - \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

よって、任意の $k = 1, 2, \dots, n$ に対して

$$\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0.$$

□

§5 において現れた Γ_{ij}^k は Riemann 多様体の Levi-Civita 接続に対する Christoffel の記号である。

例 (M, g) を n 次元 C^∞ 級 Riemann 多様体、 ∇ を M の Levi-Civita 接続とし、上のように座標近傍を選んでおく。

∇ は計量的だから、 $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ とし、 $(*)$ を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} g \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) &= g \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + g \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= g \left(\sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + g \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \right). \end{aligned}$$

よって、 $g_{ij} = g \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$ とおくと、

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l g_{jl}.$$

(g_{ij}) は正定値実対称行列に値をとり、 ∇ は捩れをもたないから、上の定理より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} &= \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l g_{jl} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l g_{li} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ji}^l g_{kl} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ki}^l g_{lj} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{kj}^l g_{il} \\ &= 2 \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk}. \end{aligned}$$

(g^{ij}) を (g_{ij}) の逆行列とし, $m = 1, 2, \dots, n$ とすると,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n g^{km} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) &= 2 \sum_{k=1}^n g^{km} \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} \\ &= 2 \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} g^{km} \\ &= 2 \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l \delta_{lm} \\ &= 2\Gamma_{ij}^m. \end{aligned}$$

ただし, δ_{lm} は Kronecker の δ である.

したがって, m を k , k を l と置き替えると,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{lk} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right).$$

これは §5 において現れた式である.

§5 においては Christoffel の記号とともに $\nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma \frac{d\gamma}{dt}$ というものも現れた. これは曲線に沿う共変微分というものである.

M を n 次元 C^∞ 級多様体とし,

$$\gamma : I \rightarrow M$$

を M 上の C^∞ 級曲線とする.

ここで, 各 $t \in I$ に対して $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$ が定められているとする. この対応を γ に沿うベクトル場という.

(U, φ) を $\gamma(t) \in U$ となる M の座標近傍とし,

$$\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

と表しておく,

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\gamma(t)}$$

と表すことができる. 各 $\xi_i(t)$ が C^∞ 級関数のとき, X は C^∞ 級であるという.

∇ を M のアファイン接続とする. このとき, X の γ に沿う共変微分 $\nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma X(t)$ は

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma X(t) &= \nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\gamma(t)} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d\xi_i(t)}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\gamma(t)} + \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

と計算していく. 接続の定義に現れた (1)~(4) の性質と同様の規則に従って計算するとともに, $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対しては

$$\nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma X_{\gamma(t)} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} X$$

がなりたつものとして特徴付けられるのである.

関連事項 7. テンソル場

多様体上のベクトル場, 微分形式, Riemann 計量やアファイン接続の振率はテンソル場というものの例である.

まず, ベクトル空間上のテンソルについて述べよう.

V を n 次元実ベクトル空間, V^* を V の双対空間とする. V の s 個の直積と V^* の r 個の直積の上の多重線形写像

$$F : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_s \times \underbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}_r \rightarrow \mathbf{R}$$

を (r, s) 型のテンソルという.

V 上の (r, s) 型テンソル全体の空間を $T_s^r(V)$ と表すことにすると, $T_s^r(V)$ は自然に実ベクトル空間となる. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ を V の基底, $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ を $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ の双対基底とし, $i_1, i_2, \dots, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n$ に対して

$$\begin{aligned} & (v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes f_{j_1} \otimes f_{j_2} \otimes \cdots \otimes f_{j_s})(v_{k_1}, v_{k_2}, \dots, v_{k_s}, f_{l_1}, f_{l_2}, \dots, f_{l_r}) \\ &= f_{j_1}(v_{k_1})f_{j_2}(v_{k_2}) \cdots f_{j_s}(v_{k_s})f_{l_1}(v_{i_1})f_{l_2}(v_{i_2}) \cdots f_{l_r}(v_{i_r}) \\ &= \begin{cases} 1 & (k_1 = j_1, k_2 = j_2, \dots, k_s = j_s, l_1 = i_1, l_2 = i_2, \dots, l_r = i_r), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \end{aligned}$$

とおくと, $\{v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes f_{j_1} \otimes f_{j_2} \otimes \cdots \otimes f_{j_s}\}_{i_1, i_2, \dots, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n}$ は $T_s^r(V)$ の基底となる. 特に, $T_s^r(V)$ の次元は n^{r+s} である. また, $T_s^r(V)$ は

$$T_s^r(V) = \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_r \otimes \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_s$$

とも表される. 更に, $T_s^r(V)$ は $T_0^s(V)$ から $T_0^r(V)$ への線形写像全体の空間と同一視することができる. 実際, $v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes f_{j_1} \otimes f_{j_2} \otimes \cdots \otimes f_{j_s}$ に対して

$$\begin{aligned} & (v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes f_{j_1} \otimes f_{j_2} \otimes \cdots \otimes f_{j_s})(v_{k_1} \otimes v_{k_2} \otimes \cdots \otimes v_{k_s}) \\ &= f_{j_1}(v_{k_1})f_{j_2}(v_{k_2}) \cdots f_{j_s}(v_{k_s})(v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_r}) \\ &= \begin{cases} v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} & (k_1 = j_1, k_2 = j_2, \dots, k_s = j_s), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \end{aligned}$$

を対応させることにより定まる線形写像を考えればよい.

さて, M を C^∞ 級多様体とする. 各 $p \in M$ に対して $K_p \in T_s^r(T_p M)$ があたえられているとき, この対応を K と表し, M 上の (r, s) 型のテンソル場という. 座標近傍を用いて表すことにより, 多様体上のテンソル場の微分可能性を定義することができる.

ベクトル場は $(1, 0)$ 型のテンソル場に他ならない.

k 次微分形式は $(0, k)$ 型のテンソル場に交代性の条件を付け加えたものである.

Riemann 計量は $(0, 2)$ 型のテンソル場に正定値対称性の条件を付け加えたものである.