§10. ベクトル束

多様体の各点に対しては接空間というベクトル空間を考えることができた. これらをすべて集めたものは再び多様体となる. まずはこの例から始めよう.

例 (接ベクトル束)
M を n 次元 C^∞ 級多様体とし,

$$TM = \{(p, v) | p \in M,\ v \in T_pM\}$$

とおく.
$(p, v) \in TM$ に対して (U, φ) を $p \in U$ となる M の座標近傍とする. このとき, v は

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R})$$

と表すことができる.
ここで,

$$V = \bigcup_{p \in U} (\{p\} \times T_pM)$$

とおき, 写像

$$\psi : V \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$$

を

$$\psi(p, v) = (\varphi(p), a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

により定める.
このとき, 上のような (V, ψ) 全体は TM の C^∞ 級座標近傍系となることが分かり, TM は C^∞ 級多様体となる. TM を M の接ベクトル束という.
更に, 自然な射影

$$\pi : TM \to M$$

は C^∞ 級となる.

アファイン接続は実はベクトル束の接続の特別な場合, すなわち接ベクトル束の接続である. 以下ではベクトル束の定義について述べよう. 簡単のため, 実ベクトル束を考えることにする.

定義　M, E を C^∞ 級多様体, π を E から M への C^∞ 級写像とする. 次の (1)〜(3) がなりたつとき, E を M 上のベクトル束という.

(1) π は全射.
(2) 各 $p \in M$ に対して $\pi^{-1}(p)$ は p に依存しない一定次元の実ベクトル空間の構造をもつ.
(3) 各 $p \in M$ に対して p の近傍 U および C^∞ 級微分同相写像

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^r$$

が存在し, 任意の $q \in U$ に対して φ の $\pi^{-1}(q)$ への制限は線形同型写像

$$\varphi|_{\pi^{-1}(q)} : \pi^{-1}(q) \to \{q\} \times \mathbf{R}^r$$

をあたえる. 特に, r は $\pi^{-1}(q)$ のベクトル空間としての次元である.

E を全空間, M を底空間, π を射影, r を階数という. また, $\pi^{-1}(p)$ を E_p と表し, p 上のファイバーという.

M を C^∞ 級多様体, E を M 上の階数 r のベクトル束とする.
このとき, 上の定義の (3) より, M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が存在し, 任意の $\alpha\in A$ および任意の $p\in U_\alpha$ に対して線形同型写像

$$\varphi_\alpha(p): E_p \to \mathbf{R}^r$$

が存在する.
よって, $\alpha,\beta\in A$, $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ とすると, $p\in U_\alpha\cap U_\beta$ に対して C^∞ 級写像

$$\varphi_{\alpha\beta}: U_\alpha\cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r,\mathbf{R})$$

を

$$\varphi_{\alpha\beta}(p)=\varphi_\alpha(p)\circ\varphi_\beta(p)^{-1}$$

により定めることができる. 写像の族 $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ を $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に対する座標変換または変換関数という.
変換関数の定義より, $\alpha,\beta,\gamma\in A$ で

$$U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma\neq\emptyset$$

ならば,

$$\varphi_{\alpha\beta}(p)\circ\varphi_{\beta\gamma}(p)=\varphi_{\alpha\gamma}(p)\quad(p\in U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma)\tag{$*$}$$

がなりたつ.
特に,

$$\varphi_{\alpha\alpha}(p)=1_{\mathbf{R}^r}\quad(p\in U_\alpha)$$

および

$$\varphi_{\beta\alpha}(p)=\varphi_{\alpha\beta}(p)^{-1}\quad(p\in U_\alpha\cap U_\beta)$$

がなりたつ.
逆に, $(*)$ をみたす写像の族があたえられていると, $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ を変換関数とするようなベクトル束を構成することができる. 実際, 次のようにして, 直積多様体 $U_\alpha\times\mathbf{R}^r$ の直和を考え, 変換関数で共通部分を張り合わせればよい.
M を C^∞ 級多様体, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を M の開被覆とする.
また, $r\in\mathbf{N}$ を固定しておき, $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ となる任意の $\alpha,\beta\in A$ に対して C^∞ 級写像

$$\varphi_{\alpha\beta}: U_\alpha\cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r,\mathbf{R})$$

があたえられ, $(*)$ をみたすとする.
ここで, X を直積多様体 $U_\alpha\times\mathbf{R}^r$ の直和, すなわち

$$X=\coprod_{\alpha\in A}(U_\alpha\times\mathbf{R}^r)$$

とし, $(p,\xi)\in U_\alpha\times\mathbf{R}^r$ および $(q,\eta)\in U_\beta\times\mathbf{R}^r$ に対して

$$p=q,\ \xi=\varphi_{\alpha\beta}(p)(\eta)$$

がなりたつとき, $(p,\xi)\sim(q,\eta)$ と表すことにする. このとき, $\sim$ は X 上の同値関係となる. 実際, $\varphi_{\alpha\alpha}$ が各点において恒等写像をあたえることから, $\sim$ は反射律をみたし, $\varphi_{\alpha\beta}$ の逆写像が各点において $\varphi_{\beta\alpha}$ によりあたえられることから $\sim$ は対称律をみたし, $(*)$ から $\sim$ は推移律をみたす.

X の $\sim$ による商集合 $X/\sim$ を E と表し, E から M への写像 π を

$$\pi([p,\xi]) = p \quad ((p,\xi) \in X)$$

により定めると, E は $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ を変換関数とする M 上のベクトル束となることが分かる.

例　多様体の接ベクトル束はベクトル束である. 接ベクトル束の階数は底空間の多様体の次元に等しい. この場合の変換関数を計算してみよう.
M を n 次元 C^∞ 級多様体, $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ を $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ となる M の座標近傍とし,

$$\varphi_\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \varphi_\beta = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

と表しておく.
$p \in U_\alpha \cap U_\beta$ とすると, $v \in T_pM$ は

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \sum_{j=1}^n b_j \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R})$$

と表すことができる.
よって, $i = 1, 2, \ldots, n$ とすると,

$$a_i = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j}.$$

したがって, 変換関数 $\varphi_{\alpha\beta}$ は行列で表すと

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_n} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

で, これは M の座標変換 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ の Jacobi 行列に他ならない.

M を C^∞ 級多様体, E を M 上のベクトル束, π を射影とする. M から E への C^∞ 級写像 ξ で

$$\pi \circ \xi = 1_M$$

となるものを E の切断という.
ベクトル束に対するファイバーはベクトル空間の構造をもつから, 各 $p \in M$ に対して E_p の零ベクトルを対応させる写像を考えることができる. この対応は M から E への C^∞ 級写像を定め, E の切断となる. これを零切断という.

例　接ベクトル束の切断とは底空間の多様体上の C^∞ 級ベクトル場に他ならない.
また, この場合の零切断とは各点に対して接空間の零ベクトルを対応させることによって得られるベクトル場である.

関連事項 10. 複素ベクトル束

実ベクトル束の場合と同様に, 複素ベクトル束を考えることができる.
M, E を C^∞ 級多様体, π を E から M への C^∞ 級写像とする. 次の (1)〜(3) がなりたつとき, E を M 上の複素ベクトル束という.

(1) π は全射.

(2) 各 $p \in M$ に対して, $\pi^{-1}(p)$ は p に依存しない一定次元の複素ベクトル空間の構造をもつ.

(3) 各 $p \in M$ に対して p の近傍 U および C^∞ 級微分同相写像

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{C}^r$$

が存在し, 任意の $q \in U$ に対して φ の $\pi^{-1}(q)$ への制限は線形同型写像

$$\varphi|_{\pi^{-1}(q)} : \pi^{-1}(q) \to \{q\} \times \mathbf{C}^r$$

をあたえる. 特に, r は $\pi^{-1}(q)$ の複素ベクトル空間としての次元である.

複素ベクトル束に対する変換関数は写像

$$\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r, \mathbf{C})$$

によりあたえられる. ここで, 関連事項 2 においても述べたように, $\mathrm{GL}(r, \mathbf{C})$ は複素多様体としての構造をもつことにも注意しよう. 複素ベクトル束の定義においては, 全空間や底空間は必ずしも複素多様体である必要はない. E, M が複素多様体で, π および各変換関数が正則写像となるとき, E を正則ベクトル束という.
実ベクトル束の場合と同様に, 複素ベクトル束に対する変換関数は

$$\varphi_{\alpha\beta}(p) \circ \varphi_{\beta\gamma}(p) = \varphi_{\alpha\gamma}(p) \quad (p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)$$

をみたす. 逆に, 上の式をみたす写像の族があたえられていると, $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ を変換関数とするような複素ベクトル束を構成することもできる.
E を複素ベクトル束とすると, 各ファイバーは複素ベクトル空間の構造をもつから, E の各点に複素数を掛けるという演算を考えることができる. 特に, 虚数単位を掛けることにより得られる E から E への写像を J と表すことにすると, J は次の (i)〜(iii) をみたす.

(i) J は E から E 自身への C^∞ 級微分同相写像.

(ii) J の各ファイバーへの制限は同じファイバーの間の線形同型写像.

(iii) $J^2 = -1_E$.

もちろん, (ii) の線形同型写像は各点を虚数単位倍するという対応である. 一般に, 上の (i), (ii) をみたすような写像をベクトル束の自己同型写像という.
逆に, E を実ベクトル束とし, 上の (i)〜(iii) をみたす E の自己同型写像 J が存在するとき, E は複素ベクトル束となる. 実際, $p \in M$, $\xi \in \pi^{-1}(p)$ に対して

$$(a + bi)\xi = (a + bJ)\xi \quad (a, b \in \mathbf{R})$$

とおくことにより, $\pi^{-1}(p)$ に複素ベクトル空間の構造を定めればよい. 特に, 複素ベクトル束としての階数が r ならば, 実ベクトル束としての階数は $2r$ となる.