§1. Euclid 空間

ここでは, 以降においてしばしば現れる Euclid 空間について簡単にまとめておこう.

実数全体の集合を $\mathbf{R}$ と表す. 自然数 n を固定しておき, n 個の実数を横に並べたもの全体の集合を $\mathbf{R}^n$ と表す. すなわち,

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

である. $\mathbf{R}^1$ は $\mathbf{R}$ のことである. また, $\mathbf{R}, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ をそれぞれ直線, 平面, 空間と同一視し, $\mathbf{R}^n$ の元を点ともいう.

$\mathbf{R}^n$ の 2 つの元 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ および $c \in \mathbf{R}$ に対して, 和 $x + y \in \mathbf{R}^n$ およびスカラー倍 $cx \in \mathbf{R}^n$ をそれぞれ

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \quad cx = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)$$

により定めると, $\mathbf{R}^n$ はベクトル空間となる. 零ベクトル 0 は $(0, 0, \ldots, 0)$ と表される元である.

問 1.1　$\mathbf{R}$ 上のベクトル空間の定義を述べよ. (線形代数の教科書を調べよ.)

$\mathbf{R}^n$ の標準内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \quad (x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n)$$

により定められる, $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数である. 以下では, 標準内積を単に内積ということにする. $\mathbf{R}^n$ に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を考えたものが n 次元実 Euclid 空間である. また, 特に断らない限り複素 Euclid 空間は考えず, $\mathbf{R}^n$ を単に n 次元 Euclid 空間ともいうことにする.

問 1.2　n 次元複素 Euclid 空間の定義を述べよ. (線形代数の教科書を調べよ.)

$x, y \in \mathbf{R}^n$ に対して x と y の内積 $\langle x, y \rangle$ は行列の積を用いて $x {}^t y$ と表しておくと, 計算が容易になる場合がある. ただし, ${}^t y$ は y の転置行列である.

問 1.3　A を n 次の実正方行列とする. 任意の $x, y \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\langle x, yA \rangle = \langle x {}^t A, y \rangle$$

がなりたつことを示せ. (行列の積を用いて計算すると容易である.)

以下では, n 次元 Euclid 空間としての $\mathbf{R}^n$ を考える. このとき, 次がなりたつ.

定理 1.1　$x, y, z \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつ.
(1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
(2) $\langle cx, y \rangle = c \langle x, y \rangle$.
(3) $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$.
(4) $x \neq 0$ ならば, $\langle x, x \rangle > 0$.

問 1.4　次の (1)〜(4) の問に答えよ.
(1) 定理 1.1 の (1) を示せ. (内積の定義を用いて直接計算する.)
(2) 定理 1.1 の (2) を示せ. (内積の定義を用いて直接計算する.)
(3) 定理 1.1 の (3) を示せ. (内積の定義を用いて直接計算する.)
(4) 定理 1.1 の (4) を示せ. (内積の定義を用いて直接計算する.)

問 1.5　$\mathbf{R}$ 上のベクトル空間の内積の定義を述べよ. (線形代数の教科書を調べよ.)

$\mathbf{R}^n$ のノルム $\| \ \|$ は内積を用いて

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定められる, $\mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数である. 定義より, x のノルムまたは長さ $\|x\|$ は $\|x\| \geq 0$ をみたし, $\|x\| = 0$ となるのは $x = 0$ のときのみである.

定理 1.2　$x, y \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $\|cx\| = |c|\|x\|$.
(2) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ (Cauchy-Schwarz の不等式).
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (三角不等式).

証明　(2) のみ示す.
$y = 0$ のときは明らか.
$y \neq 0$ のとき,

$$\langle y, y\rangle > 0$$

に注意すると,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\langle x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y, x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y \right\rangle \langle y, y\rangle \\
&= \left(\langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle + \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle^2}\langle y, y\rangle \right) \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2\|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2.
\end{aligned}$$

よって,

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2.$$

すなわち,

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

□

問 1.6　次の (1), (2) の問に答えよ.
(1) 定理 1.2 の (1) を示せ. (ノルムの定義および内積の性質を用いる.)
(2) 定理 1.2 の (3) を示せ. (ノルムの定義および Cauchy-Schwarz の不等式を用いる.)

問 1.7　$x, y \in \mathbf{R}^n$ とすると,

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

がなりたつことを示せ. (ノルムの定義および内積の性質を用いる.)

$\mathbf{R}^n$ の Euclid 距離 d はノルムを用いて

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in \mathbf{R}^n)$$

により定められる, $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数である.

定理 1.3　$x, y, z \in \mathbf{R}^n$ とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $d(x, y) \geq 0$ で, $d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のときのみ.
(2) $d(y, x) = d(x, y)$.
(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式).

問 1.8 次の (1)〜(3) の問に答えよ.
(1) 定理 1.3 の (1) を示せ. (Euclid 距離の定義およびノルムの性質を用いる.)
(2) 定理 1.3 の (2) を示せ. (Euclid 距離の定義およびノルムの性質を用いる.)
(3) 定理 1.3 の (3) を示せ. (ノルムに関する三角不等式を用いる.)

一般の集合に対しても定理 1.3 の (1)〜(3) のような性質をもつ関数 d を考えると, 距離空間というものを定義することができる.

問 1.9 距離空間の定義を述べよ. (位相空間論の教科書を調べよ.)

$\mathbf{R}^2$ の 2 点 $a = (a_1, a_2)$ および $b = (b_1, b_2)$ をそれぞれ原点から a, b へ向かう平面ベクトルとみなすことにする. a, b がともに零ベクトルではないとし, これらのなす角が θ で, $0 < \theta < \pi$ とする. このとき, a, b を 2 辺とする三角形に対して余弦定理を用いると,

$$\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\| \cos\theta$$

だから,

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2\|a\|\|b\| \cos\theta$$

である. よって,

$$\langle a, b\rangle = \|a\|\|b\| \cos\theta$$

がなりたつ. 特に, a と b が直交するのは $\langle a, b\rangle = 0$ のときである.

更に, a, b を 2 辺とする平行四辺形の面積は

$$\begin{aligned}
\|a\|\|b\| \sin\theta &= \|a\|\|b\|\sqrt{1 - \cos^2\theta} \\
&= \|a\|\|b\|\sqrt{1 - \frac{\langle a, b\rangle^2}{\|a\|^2\|b\|^2}} \\
&= \sqrt{\|a\|^2\|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2} \\
&= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2} \\
&= \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} \\
&= \left| \det \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|
\end{aligned}$$

となり, 2 次の行列式を幾何学的に解釈することができる.

$\mathbf{R}^3$ の 2 点 $a = (a_1, a_2, a_3)$ および $b = (b_1, b_2, b_3)$ をそれぞれ原点から a, b へ向かう空間ベクトルとみなすことにする. 平面ベクトルの場合と同様に, a, b のなす角を θ とすると,

$$\langle a, b\rangle = \|a\|\|b\| \cos\theta$$

がなりたつ.

更に, a と b の外積 $a \times b \in \mathbf{R}^3$ は a, b が平行な場合は零ベクトルで, a, b が平行でない場合は次の (1)〜(3) をみたすように定められる.

(1) $a \times b$ は a, b と直交する.

(2) $\|a \times b\|$ は a, b を 2 辺とする平行四辺形の面積である.

(3) $a \times b$ の向きは a が b に重なるように角 θ 回転するとき, 右ネジが進む向きである. ただし, $0 < \theta < \pi$ とする.

e_1, e_2, e_3 を $\mathbf{R}^3$ の基本ベクトルとする. すなわち,

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

である. よく用いられる右手系という座標系を選んでおくと,

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2 \tag{$*$}$$

がなりたつ.

定理 1.4 $a, b, c \in \mathbf{R}^3$ とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $a \times b = -b \times a$.
(2) $k \in \mathbf{R}$ とすると, $(ka) \times b = a \times (kb) = k(a \times b)$.
(3) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$, $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$.

$\mathbf{R}^3$ の 2 点 $a = (a_1, a_2, a_3)$ および $b = (b_1, b_2, b_3)$ は

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, \quad b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

と表されるから, 定理 1.4 と $(*)$ より,

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) \times (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned}$$

となる.

問 1.10 外積 $(1, 2, 3) \times (4, 5, 6)$ を求めよ. $((-3, 6, -3))$

$a, b, c \in \mathbf{R}^3$ に対して a, b, c の 3 重積は $\langle a \times b, c\rangle$ により定められる. a, b, c を

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, \quad b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3, \quad c = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$$

と表しておくと, 上の計算より

$$\begin{aligned} \langle a \times b, c\rangle &= c_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} - c_2 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + c_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad \text{(第 3 行に関する余因子展開)} \\ &= \det \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる.

平面ベクトルの場合と同様の計算を行うと, a, b, c を 3 辺とする平行六面体の体積は $|\langle a \times b, c\rangle|$ であることが分かり, 3 次の行列式を幾何学的に解釈することができる.

問 1.11 $a, b, c, d \in \mathbf{R}^3$ とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつことを示せ.
(1) $\langle a \times b, c\rangle = \langle b \times c, a\rangle = \langle c \times a, b\rangle$. (3 重積を行列式で表し, 行列式の性質を用いる.)
(2) $(a \times b) \times c = \langle a, c\rangle b - \langle b, c\rangle a$. (成分を用いて直接計算する.)
(3) $(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b = 0$ (Jacobi の恒等式). ((2) を用いる.)
(4) $\langle a \times b, c \times d\rangle = \langle a, c\rangle\langle b, d\rangle - \langle a, d\rangle\langle b, c\rangle$ (Lagrange の公式). ((1), (2) を用いる.)