§10. 2次超曲面

実数を係数とする $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の2次方程式は実対称行列 A と $b \in \mathbf{R}^n$ および $c \in \mathbf{R}$ を用いて,

$$ {}^t xAx + 2{}^t bx + c = 0 \qquad (*)$$

と表すことができる. ただし,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$$

である. $i, j = 1, 2, \ldots, n$ とすると, $x_i x_j$ と $x_j x_i$ は同類項であるから, A は実対称行列とすることができることに注意しよう.

問 10.1　$n = 2$ のとき, 上の事実を示せ. ($px_1^2 + 2qx_1x_2 + rx_2^2 + 2sx_1 + 2tx_2 + u = 0$ を考える.)

定義 10.1　$(*)$ をみたす x 全体の集合または単に $(*)$ を2次超曲面という. 特に, $n = 2$, $n = 3$ のとき, それぞれ2次曲線, 2次曲面という.

§9においても扱ったように, 実対称行列は直交行列によって対角化されるから, $(*)$ によって表される2次超曲面は, 必要ならば座標変換を行うことにより, 簡単な形に表すことができそうである. しかも, 実対称行列を対角化する直交行列は, 必要ならば2つの列を入れ替えることにより, 行列式を1とすることができる. 2次超曲面について詳しく述べる前に, $\mathbf{R}^n$ の点に行列式が1の直交行列, すなわち $\mathrm{SO}(n)$ の元を掛けることの意味を考えてみよう.

$n = 2$ の場合は問7.8において扱ったように, $\mathbf{R}^2$ の点に $\mathrm{SO}(2)$ の元を掛けることは回転を意味する.

$n = 3$ の場合について考えるため, 数の範囲を複素数まで拡げ, 正規行列のユニタリ行列による対角化について簡単に述べておこう. 複素行列 A に対して, A の転置と複素共役を取ることにより得られる行列を A^* と表す. すなわち, A^* は A の転置行列の各成分の複素共役を取ることにより得られる行列である.

定義 10.2　A を n 次の複素正方行列とする. A は

$$A^*A = AA^*$$

をみたすとき, 正規行列という. また, A は

$$A^*A = AA^* = E$$

をみたすとき, ユニタリ行列という.

なお, ユニタリ行列を定義する式は $A^*A = E$ または $AA^* = E$ の何れか1つのみでもよい.

問 10.2　実対称行列, 実交代行列, 直交行列, ユニタリ行列はすべて正規行列であることを示せ. (それぞれの行列の定義を用いて計算する.)

問 10.3　次の (1), (2) の問に答えよ.

(1) n 次のユニタリ行列全体の集合を $\mathrm{U}(n)$ と表す. $\mathrm{U}(n)$ は行列の積に関して群となることを示せ. $\mathrm{U}(n)$ を n 次のユニタリ群という. (群の定義を確認する.)

(2) 行列式が1の n 次のユニタリ行列全体の集合を $\mathrm{SU}(n)$ と表す. $\mathrm{SU}(n)$ は行列の積に関して群となることを示せ. $\mathrm{SU}(n)$ を n 次の特殊ユニタリ群という. (群の定義を確認する.)

問 10.4　A, B を n 次の実正方行列とする. $A+iB$ がユニタリ行列であるための必要十分条件は $2n$ 次の正方行列 $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ が直交行列であることを示せ. ただし, i は虚数単位である. ($(A+iB)^*(A+iB)$ および ${}^t\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ を計算する.)

　正規行列のユニタリ行列による対角化は次のように述べることができる.

定理 10.1　A を複素正方行列とすると, 次の (1), (2) は同値.

(1) A はユニタリ行列によって対角化可能.
(2) A は正規行列.

問 10.5　実交代行列の固有値は純虚数であることを示せ. (定理 10.1 を用いる.)

　正規行列をユニタリ行列によって対角化する方法は, §9 において扱った実対称行列を直交行列によって対角化する方法と同様である. すなわち, 正規行列を対角化するユニタリ行列は次の (1)〜(3) の手順で求めればよい.

(1) 固有方程式を解き, 固有値を求める.
(2) 各固有値に対する固有空間の正規直交基底を選ぶ.
(3) 正規直交基底を列ベクトルとして並べる.

ただし, 上の手順の (2), (3) では n 次元複素 Euclid 空間の標準 Hermite 内積を考えている.

問 10.6　複素数全体の集合を $\mathbf{C}$ と表す.
(1) $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間の定義を述べよ. (線形代数の教科書を調べよ.)
(2) $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間の Hermite 内積の定義を述べよ. (線形代数の教科書を調べよ.)

問 10.7　等式

$$A^* = A$$

をみたす複素正方行列は正規行列である. このような A を Hermite 行列という. また, 等式

$$A^* = -A$$

をみたす正方行列も正規行列である. このような A を歪 Hermite 行列という.
　2 次の Hermite 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

により定める. 次の (1)〜(4) の問に答えよ.
(1) A の固有値は -1 と 1 であることを示せ. (A の固有方程式を直接解く.)
(2) A の固有値 -1 に対する固有ベクトルを 1 つ求めよ. (例えば, $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$)
(3) A の固有値 1 に対する固有ベクトルを 1 つ求めよ. (例えば, $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$)
(4) A を対角化するユニタリ行列を 1 つ求めよ. ((2), (3) で得られたベクトルを正規化する.)

さて, $A \in \mathrm{O}(n)$ とすると, 問 10.2 より, A は正規行列であるから, 定理 10.1 より,

$$U^{-1}AU = U^*AU = D$$

となる $U \in \mathrm{U}(n)$ および n 次の対角行列 D が存在する. このとき, $U \in \mathrm{U}(n)$, $A \in \mathrm{O}(n)$ より,

$$\begin{aligned} D^*D &= (U^*AU)^*(U^*AU) \\ &= U^{*t}AUU^*AU \\ &= E. \end{aligned}$$

よって, D の対角成分は絶対値 1 の複素数となり, それらは A の固有値でもある.

問 10.8　$A \in \mathrm{O}(3)$ とする.
(1) 次の (ア), (イ) をみたす $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底 $\{u_1, u_2, u_3\}$ が存在することを示せ.

(ア) u_1 は固有値 1 か -1 に対する A の固有ベクトル.
(イ) $0 \leq \theta < 2\pi$ をみたす θ が存在し, $u_2 \pm iu_3$ は固有値 $\cos\theta \mp i\sin\theta$ に対する A の固有ベクトル. ただし, 複号同順である.

(A の固有方程式は実数係数の 3 次方程式.)
(2) $P = (u_1, u_2, u_3)$ とおくと, $P \in \mathrm{O}(3)$ で,

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となることを示せ. ((1) の条件 (イ) については実部と虚部に分ける.)

問 10.8 より, $\mathbf{R}^3$ の点に $\mathrm{SO}(3)$ の元を掛けることは原点を通る u_1 方向の直線を回転軸とする角 θ の回転を意味する. 一般の n に対しても $\mathrm{SO}(n)$ の元は回転を表し, このことから $\mathrm{SO}(n)$ を回転群ともいう.

では, 始めに戻り, $(*)$ によって表される 2 次超曲面を簡単に表すことを考えよう. $P \in \mathrm{SO}(n)$, $q \in \mathbf{R}^n$ とし, $x \in \mathbf{R}^n$ から $y \in \mathbf{R}^n$ への変換を

$$x = Py + q \tag{$**$}$$

により定める. すなわち, x は y を P により回転させて, 更に q だけ平行移動させる $\mathbf{R}^n$ の合同変換によって得られる. $(**)$ を $(*)$ に代入すると,

$${}^t(Py+q)A(Py+q) + 2{}^tb(Py+q) + c = 0.$$

A は実対称行列であることに注意すると,

$${}^ty({}^tPAP)y + 2{}^t(Aq+b)Py + {}^tqAq + 2{}^tbq + c = 0.$$

ここで,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ {}^tb & c \end{pmatrix}$$

とおく. A が対角行列となるように P を選んでおき, 更に計算すると, 次が得られる.

定理 10.2　$(*)$ によって表される 2 次超曲面は, 必要ならば回転と平行移動を行うことにより, 次の (1)〜(3) の何れかのように表すことができる.

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 + d = 0 \\
&(2)\ \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 + 2py_{r+1} = 0 \\
&(3)\ \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 = 0
\end{aligned}
$$

ただし,

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \neq 0,\ d \neq 0,\ p > 0.$$

問 10.9　次の (1)〜(3) の問に答えよ.
(1) 定理 10.2 の (1) の場合の A および $\tilde{A}$ の階数を求めよ. ($\operatorname{rank} A = r$, $\operatorname{rank} \tilde{A} = r + 1$)
(2) 定理 10.2 の (2) の場合の A および $\tilde{A}$ の階数を求めよ. ($\operatorname{rank} A = r$, $\operatorname{rank} \tilde{A} = r + 2$)
(3) 定理 10.2 の (3) の場合の A および $\tilde{A}$ の階数を求めよ. ($\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} = r$)

定理 10.2 の (1)〜(3) のように表される 2 次超曲面を標準形という. また, (1), (3) のように表される 2 次超曲面は原点に関して対称である. このことから, これらを有心 2 次超曲面という. 特に, A が正則なときは有心 2 次超曲面である. これに対して, (2) のように表される 2 次超曲面を無心 2 次超曲面という. 更に, (1), (2) において, $\operatorname{rank} \tilde{A} = n + 1$ のときは固有な 2 次超曲面という.

問 10.10　次の (1), (2) の問に答えよ.
(1) 固有な有心 2 次曲線を分類せよ. (空集合, 楕円, 双曲線)
(2) 固有な無心 2 次曲線を分類せよ. (放物線)

問 10.11　次の (1), (2) の問に答えよ.
(1) 固有な有心 2 次曲面を分類せよ. (空集合, 楕円面, 一葉双曲面, 二葉双曲面)
(2) 固有な無心 2 次曲面を分類せよ. (楕円放物面, 双曲放物面)

問 10.12　正則な n 次の実対称行列 A と $b \in \mathbf{R}^n$ および $c \in \mathbf{R}$ に対して, 有心 2 次超曲面

$${}^t x A x + 2 {}^t b x + c = 0$$

を考える. このとき, A の固有値を重解も込めて $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とし,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ {}^t b & c \end{pmatrix}$$

とおく. 上の有心 2 次超曲面の標準形は

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 + \frac{\det \tilde{A}}{\det A} = 0$$

と表すことができることを示せ. ($Aq + b = 0$ のとき, $\begin{pmatrix} A & b \\ {}^t b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ {}^t b & {}^t b q + c \end{pmatrix}$)