§11. 双 1 次形式と 2 次形式

§10 において扱ったことから分かるように, 2 次超曲面の分類では変数の 2 次の項の部分が重要な役割を果たした. ここでは, このことと深く関わる双 1 次形式と 2 次形式について述べよう. 以下では, $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間を考える.

定義 11.1　V をベクトル空間, b を $V \times V$ で定義された実数値関数とする. $(x, y) \in V \times V$ から $b(x, y)$ への対応が x および y について線形なとき, すなわち b が次の (1)〜(3) をみたすとき, b を V 上の双線形形式または双 1 次形式という.

(1) 任意の $x, x', y \in V$ に対して, $b(x + x', y) = b(x, y) + b(x', y)$.
(2) 任意の $x, y, y' \in V$ に対して, $b(x, y + y') = b(x, y) + b(x, y')$.
(3) 任意の $c \in \mathbf{R}$ および任意の $x, y \in V$ に対して, $b(cx, y) = b(x, cy) = cb(x, y)$.

更に, 任意の $x, y \in V$ に対して,

$$b(x, y) = b(y, x)$$

がなりたつとき, b を対称形式という. また, 任意の $x, y \in V$ に対して,

$$b(x, y) = -b(y, x)$$

がなりたつとき, b を交代形式という.

問 11.1　V をベクトル空間, b を V 上の双 1 次形式とする.
(1) b が交代形式ならば, 任意の $x \in V$ に対して

$$b(x, x) = 0$$

であることを示せ. (交代形式の条件において $x = y$ とする.)
(2) (1) の逆を示せ. ($b(x + y, x + y)$ を考える.)

対称形式, 交代形式は次の意味で基本的である.

定理 11.1　V をベクトル空間, b を V 上の双 1 次形式とする. このとき, V 上の対称形式 b_s および交代形式 b_a が一意的に存在し,

$$b = b_s + b_a.$$

問 11.2　定理 11.1 を示せ. ($b_s(x, y) = \frac{1}{2}(b(x, y) + b(y, x)$, $b_a(x, y) = \frac{1}{2}(b(x, y) - b(y, x))$)

更に, 対称形式, 交代形式の非退化性について定めよう.

定義 11.2　V をベクトル空間, b を V 上の対称形式または交代形式とする. 任意の $y \in V$ に対して,

$$b(x, y) = 0 \quad (x \in V)$$

ならば $x = 0$ となるとき, b は非退化であるという.

注意 11.1　対称形式, 交代形式の定義より, 定義 11.2 において, 任意の $x \in V$ に対して,

$$b(x, y) = 0 \quad (y \in V)$$

ならば $y = 0$ となるとき, b は非退化であると定めてもよい.

問 11.3　ベクトル空間の内積は非退化対称形式を定めることを示せ. (内積の定義を用いる.)

問 11.4 §9, §10 と同様に $\mathbf{R}^n$ を n 個の実数を縦に並べたもの全体の集合として表しておき, A を n 次の実正方行列とする. このとき, $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数 b を

$$b(x, y) = {}^t x A y \quad (x, y \in \mathbf{R}^n)$$

により定める.
(1) b は V 上の双 1 次形式であることを示せ. (定義 11.1 の (1)〜(3) を確認する.)
(2) A が実対称行列のとき, b は対称形式であることを示せ. (1 次行列は転置に関して不変.)
(3) A が実対称行列のとき, b が非退化となるための A の条件を求めよ. (A は正則.)
(4) A が実交代行列のとき, b は交代形式であることを示せ. (1 次行列は転置に関して不変.)
(5) A が実交代行列のとき, b が非退化となるための条件を求めよ. (n は偶数, A は正則.)

問 11.5 有界閉区間 $[\alpha, \beta]$ で定義された実数値連続関数全体の集合を $C[\alpha, \beta]$ と表す.
(1) $C[\alpha, \beta]$ はベクトル空間となることを示せ. (ベクトル空間の定義を確認する.)
(2) $C[\alpha, \beta] \times C[\alpha, \beta]$ で定義された実数値関数 b を

$$b(f, g) = \int_\alpha^\beta f(x) g(x) dx \quad (f, g \in C[\alpha, \beta])$$

により定める. b は $C[\alpha, \beta]$ 上の非退化対称形式であることを示せ. (定義を確認する.)

実は, 有限次元ベクトル空間上の双 1 次形式は, 基底を選んでおくことにより, 問 11.4 のように行列を用いて表すことができる.

問 11.6 V を n 次元ベクトル空間とし, V の基底 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ を 1 つ選んでおく. $x \in V$ に対して, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を基底 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ に関する x の成分とし, V から $\mathbf{R}^n$ への写像 φ を

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

により定める.
(1) 基底に関する成分の定義を述べよ. (線形代数の教科書を調べよ.)
(2) φ は V から $\mathbf{R}^n$ への線形写像であることを示せ. (線形写像の定義を確認する.)
(3) φ は同型写像であることを示せ. ($\dim V = \dim \mathbf{R}^n$ に注意し, 単射であることを示す.)
(4) b を V 上の双 1 次形式とする. $i, j = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $b(a_i, a_j)$ を (i, j) 成分とする n 次の正方行列を A とおき, これを基底 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ に関する b の表現行列という. また, $x, y \in V$ に対して, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ および $y_1, y_2, \ldots, y_n$ をそれぞれ基底 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ に関する x, y の成分とする. このとき,

$$b(x, y) = {}^t\varphi(x) A \varphi(y)$$

がなりたつことを示せ. (定義に従い直接計算する.)
(5) (4) において, b が対称形式となるための A の条件を求めよ. (A は実対称行列.)
(6) 更に, (5) において, b が非退化となるための A の条件を求めよ. (A は正則.)
(7) (4) において, b が交代形式となるための A の条件を求めよ. (A は実交代行列.)
(8) 更に, (7) において, b が非退化となるための条件を求めよ. (n は偶数, A は正則.)

問 11.6 において, 表現行列 A の階数は基底 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ の選び方に依存しないことが分かる. これを b の階数という.

対称形式について, 問 11.6, 定理 9.1 および定理 9.2 より, 次がなりたつ.

定理 11.2　V を n 次元ベクトル空間, b を V 上の対称形式とする. このとき, V の基底 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ が存在し, 基底 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ に関する b の表現行列は

$$\begin{pmatrix} E_r & O & O \\ O & -E_s & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

と表される. ただし, E_r, E_s はそれぞれ r 次, s 次の単位行列である.

注意 11.2　定理 11.2 において, r, s の値は基底の選び方に依存しないことが分かる. この事実を Sylvester の慣性律という. このとき, 組 (r, s) を b の符号数という. r, s はそれぞれ表現行列の正, 負の固有値の個数に等しく, b の階数は $r + s$ である. なお, 符号数を逆に並べて (s, r) と表すこともある.

交代形式についても定理 11.2 と同様の定理を得るために, 実交代行列の標準形について考えてみよう.

問 11.7　A を n 次の実交代行列とする. このとき, n 次の直交行列 P および 0 でない実数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ が存在し,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & & & \\ -\alpha_1 & 0 & & & & \text{\huge 0} \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & \alpha_r & \\ & & & -\alpha_r & 0 & \\ \text{\huge 0} & & & & & \text{\huge 0} \end{pmatrix}$$

と表されることを示せ. (定理 10.1, 問 10.5 を用いる.)

問 11.6 および問 11.7 より, 交代形式について次がなりたつ.

定理 11.3　V を n 次元ベクトル空間, b を V 上の交代形式とする. このとき, V の基底 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ が存在し, 基底 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ に関する b の表現行列は

$$\begin{pmatrix} O & E_r & O \\ -E_r & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

と表される.

次に, 2 次形式について述べよう.

定義 11.3　V をベクトル空間, b を V 上の対称形式とし, V 上の実数値関数 q を

$$q(x) = b(x, x) \quad (x \in V)$$

により定める. q を b に対する 2 次形式という.

例 11.1　A を n 次の実対称行列とし, $\mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数 q を

$$q(x) = {}^t xAx \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める．このとき, q は問 11.4 において定めた b に対する 2 次形式である．なお, この q のことを始めから 2 次形式と定義することもある．

例 11.2 問 11.5 において現れたベクトル空間 $C[\alpha,\beta]$ で定義された実数値関数 q を

$$q(f)=\int_\alpha^\beta (f(x))^2dx \quad (f\in C[\alpha,\beta])$$

により定める．このとき, q は問 11.5 において定めた b に対する 2 次形式である．

問 11.8 V をベクトル空間, b を V 上の対称形式, q を b に対する 2 次形式とする．このとき, 次の (1), (2) がなりたつことを示せ．
(1) 任意の $c\in\mathbf{R}$ および任意の $x\in V$ に対して, $q(cx)=c^2q(x)$. (q の定義を用いる.)
(2) 任意の $x,y\in V$ に対して, $2b(x,y)=q(x+y)-q(x)-q(y)$. (右辺を計算する.)

注意 11.3 問 11.8 において, 2 次形式は対称形式を用いず, (1) の条件をみたし, (2) により定められる b が対称形式となるような関数 q として定めることもできる．このとき, b を q に対する対称形式という．特に, V 上の 2 次形式と V 上の対称形式とは 1 対 1 に対応する．また, 2 次形式に対しても表現行列を考えることができ, Sylvester の慣性律より, 符号数, 階数を定めることができる．

定義 11.4 V をベクトル空間, q を V 上の 2 次形式, b を q に対する対称形式とする．任意の $x\in V\setminus\{0\}$ に対して $q(x)>0$, すなわち $b(x,x)>0$ となるとき, q,b はそれぞれ正定値であるという．任意の $x\in V\setminus\{0\}$ に対して $q(x)<0$, すなわち $b(x,x)<0$ となるとき, q,b はそれぞれ負定値であるという．正定値, 負定値の 2 次形式, 対称形式は合わせて定値であるという．定値でない 2 次形式, 対称形式は不定値であるという．実対称行列は問 11.4 のように定められる対称形式が正定値のとき, 正定値であるという．負定値, 定値, 不定値についても同様に定める．

例 11.3 ベクトル空間の内積は定義より, 正定値な対称形式を定める．

問 11.9 正定値実対称行列の和は正定値実対称行列であることを示せ. (定義を確認する.)

有限次元ベクトル空間上の 2 次形式および対称形式の正定値性や負定値性は, 表現行列を考えることにより, 符号数を用いて言い替えることができる．簡単のため, 2 次形式の場合について述べよう．

定理 11.4 V を n 次元ベクトル空間, b を V 上の 2 次形式とする. b が正定値であることと b の符号数が $(n,0)$ であることは同値．また, b が負定値であることと b の符号数が $(0,n)$ であることは同値. 特に, 定値な 2 次形式に対する対称形式は非退化である．

問 11.10 $a\in\mathbf{R}$ とする．$\mathbf{R}^3$ を

$$\mathbf{R}^3=\{(x,y,z)|x,y,z\in\mathbf{R}\}$$

と表しておき, $\mathbf{R}^3$ 上の 2 次形式 q を

$$q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2a(xy+yz+zx) \quad ((x,y,z)\in\mathbf{R}^3)$$

により定める.
(1) q が正定値となるための a の条件を求めよ. ($-\frac{1}{2}<a<1$)
(2) q の符号数が $(2,1)$ となるための a の条件を求めよ. ($a<-\frac{1}{2}$)