§12. 極値問題

ここでは, 多変数の実数値関数の極大値, 極小値を求める問題, すなわち極値問題について述べよう.

まず, 偏微分可能な関数の定義域の内部において極値をあたえる点の候補は, 次の定理を用いることにより絞り込むことができる. 証明は 1 変数の場合に帰着させればよい.

定理 12.1 U を $\mathbf{R}^n$ の開集合, f を U で定義された実数値関数とし, $p \in U$ とする. f が p で極値をとるならば,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0.$$

§6 において扱ったことより, 定理 12.1 に現れた条件は簡単に

$$f'(p) = 0,\ (df)_p = 0,\ (Jf)(p) = 0$$

の何れかによって表すこともできる. また, このような条件をみたす p を f の停留点という.

停留点は必ずしも極値をあたえるとは限らない. そこで, 次に $\mathbf{R}^n$ の開集合で定義された C^2 級の実数値関数の極値問題を扱い, 極大, 極小は狭い意味で考えよう. 例えば, $\mathbf{R}^n$ の開集合 U で定義された実数値関数 f が $p \in U$ で極大であるとは, U に含まれる p のある近傍 V が存在し, $x \in V$, $x \neq p$ ならば $f(p) > f(x)$ がなりたつこととする. このような状況の下では, 定理 12.1 で求めた極値をあたえる点の候補が実際に極値をあたえるかどうかを判定する便利な十分条件が知られている. その背景となるものは Taylor の定理と §11 において扱った 2 次形式である. なお, ここでは $\mathbf{R}^n$ は n 個の実数を横に並べたもの全体の集合として表しておく.

定理 12.2 (Taylor の定理) U を $\mathbf{R}^n$ の開集合, f を U で定義された C^k 級の実数値関数とし, $x \in U$, $h \in \mathbf{R}^n$ とする. x と $x+h$ を結ぶ線分が U に含まれるとき, $0 < \theta < 1$ をみたす $\theta \in \mathbf{R}$ が存在し,

$$\begin{aligned} f(x+h) = f(x) &+ \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m!} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m = 1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}}(x) h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_m} \\ &+ \frac{1}{k!} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}(x + \theta h) h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_k}. \end{aligned}$$

ただし,

$$h = (h_1, h_2, \ldots, h_n).$$

問 12.1 次の (1)〜(3) の等式を示せ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$. ($e^x$ に対する Maclaurin 展開を用いる.)

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$. ($\log(1-x)$ に対する Maclaurin 展開を用いる.)

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$. ($\tan^{-1} x$ に対する Maclaurin 展開を用いる.)

U を $\mathbf{R}^n$ の開集合, f を U で定義された C^2 級の実数値関数とし, $p \in U$ とする. f が p で極値をとるとき, 定理 12.2 において $k = 2$ とし, 定理 12.1 を用いると,

$$f(p+h) - f(p) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p + \theta h) h_i h_j$$

となり, この式の右辺は $\theta = 0$ としてしまえば, 2 次形式である. そこで, U で定義された n 次の実対称行列に値をとる関数 H_f を

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める. f が C^2 級であることより, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

がなりたつことに注意しよう. H_f を f の Hesse 行列という.

まず, 2 次形式の極値問題を考えよう. A を n 次の実対称行列とし, $\mathbf{R}^n$ 上の 2 次形式 q を

$$q(x) = xA^t x \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める. このとき, 次がなりたつ. 定理 11.2 も思い出すとよい.

定理 12.3　次の (1)〜(5) は同値.

(1) q は $x = 0$ で最小値 0 をとる.
(2) q は $x = 0$ で極小値 0 をとる.
(3) q は正定値.
(4) A の固有値はすべて正.
(5) $A = (a_{ij})$ とし, $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して,

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

とおくと, $D_k > 0$.

証明　(1)〜(4) の同値性: §11 において扱ったことから, ほとんど明らかである.
(3) $\Rightarrow$ (5): まず, (3) と (4) は同値だから,

$$D_n > 0.$$

次に, $\mathbf{R}^n$ の部分空間 W_k を

$$W_k = \{(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) | x_1, \cdots, x_k \in \mathbf{R}\}$$

により定める. 仮定より, q の W_k への制限は W_k 上の正定値な 2 次形式を定める. よって, 上と同様に,

$$D_k > 0.$$

(5) $\Rightarrow$ (3): n に関する数学的帰納法により示すことができる. □

定理 12.3 において, D_k を A の主小行列式という.

A が負定値であることと $-A$ が正定値であることは同値であるから, 定理 12.3 より, 次がなりたつ.

定理 12.4 次の (1)〜(5) は同値.

(1) q は $x=0$ で最大値 0 をとる.
(2) q は $x=0$ で極大値 0 をとる.
(3) q は負定値.
(4) A の固有値はすべて負.
(5) 任意の $k=1,2,\ldots,n$ に対して, $(-1)^k D_k > 0$.

定理 12.3, 定理 12.4 を用いると, 次がなりたつことが分かる.

定理 12.5 U を $\mathbf{R}^n$ の開集合, f を U で定義された C^2 級の実数値関数とし, $p \in U$ とする. また, $k=1,2,\ldots,n$ に対して, D_k を Hesse 行列 H_f の主小行列式とする. p が

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0$$

をみたすならば, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) 各 $k=1,2,\ldots,n$ に対して $D_k(p) > 0$ ならば, f は p で極小.
(2) 各 $k=1,2,\ldots,n$ に対して $(-1)^k D_k(p) > 0$ ならば, f は p で極大.
(3) $D_n(p) \neq 0$ で, (1), (2) の場合でないならば, f は p で極値をとらない.

なお, Hesse 行列の行列式は Hesse 行列式または Hessian ともいう.

例 12.1 $\mathbf{R}^2$ で定義された実数値関数 f を

$$f(x,y) = x^2 + x^2 y + y^2 \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2)$$

により定める.

このとき,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2xy, \ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2y.$$

よって,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$

とすると,

$$(x,y) = (0,0), (\pm\sqrt{2}, -1).$$

ここで,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + 2y, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

$(0,0)$ における Hessian は

$$(2 + 2\cdot 0)\cdot 2 - (2\cdot 0)^2 = 4 > 0.$$

また,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0.$$

したがって, f は $(0,0)$ で極小値 $f(0,0)=0$ をとる.
　$(\sqrt{2},-1)$ における Hessian は

$$\{2+2\cdot(-1)\}\cdot 2-(2\sqrt{2})^2=-8<0.$$

したがって, f は $(\sqrt{2},-1)$ で極値をとらない.
　同様に, f は $(-\sqrt{2},-1)$ で極値をとらない.

問 12.2　次の (1), (2) により定められた実数値関数 f の極値を調べよ.
(1) $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ $((x,y)\in\mathbf{R}^2)$. ($(1,1)$ で極小値 -1)
(2) $f(x,y)=x^2y+xy^2$ $((x,y)\in\mathbf{R}^2)$. (極値をとらない.)

　最後に, 条件付き極値問題について述べよう. 条件付き極値問題の極値をあたえる点の候補は Lagrange の未定乗数法を用いて求めることができる. 証明には陰関数定理が用いられる.

定理 12.6 (Lagrange の未定乗数法)　U を $\mathbf{R}^n$ の開集合, f を U で定義された C^1 級の実数値関数, g を U で定義された $\mathbf{R}^m$ に値をとるベクトル値関数とし, $p\in U$ とする. f が条件 $g=0$ の下で p で極値をとるならば, 次の (1), (2) の何れかがなりたつ.

(1) $U\times\mathbf{R}^m$ で定義された実数値関数 Φ を

$$\Phi(x,\lambda)=f(x)-g(x)^t\lambda\quad(x\in U,\ \lambda\in\mathbf{R}^m)$$

により定めると, ある $\lambda_0\in\mathbf{R}^m$ が存在し, $\Phi'(p,\lambda_0)=0$.

(2) $\operatorname{rank}\Phi'(p,\lambda_0)<m$.

　定理 12.6 において, (1) に現れた λ を Lagrange の未定乗数という. また, (1) の条件は

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)-\frac{\partial g}{\partial x_1}(p)^t\lambda_0=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)-\frac{\partial g}{\partial x_n}(p)^t\lambda_0=g(p)=0$$

と同値である.
　Lagrange の未定乗数法を用いて求めた極値をあたえる点の候補が実際に極値をあたえるかどうかを判定するには更なる考察が必要である. 比較的容易なのは条件をみたす点全体の集合が Euclid 空間の有界閉集合となる場合である. それは次がなりたつからである.

定理 12.7　Euclid 空間の有界閉集合で連続な実数値関数は最大値および最小値をもつ.

問 12.3　$a,b>0$ とし, 楕円

$$\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$$

を考える.
(1) $a>b>0$ のとき, この楕円上における関数 x^2+y^2 の最大値および最小値を Lagrange の未定乗数法を用いて求めよ. (最大値 a^2, 最小値 b^2)
(2) $(l,m)\neq(0,0)$ とする. この楕円上における関数 $lx+my$ の最大値および最小値を Lagrange の未定乗数法を用いて求めよ. (最大値 $\sqrt{a^2l^2+b^2m^2}$, 最小値 $-\sqrt{a^2l^2+b^2m^2}$)

問 12.4　$(a,b)\neq(0,0)$, $c\in\mathbf{R}$ とし, 平面上の直線 l を

$$l=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|ax+by+c=0\}$$

により定める. $\mathrm{P}(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$ とすると, P と l 上の点の距離の中で最小のものが存在し, これを P と l の距離という. P と l の距離を Lagrange の未定乗数法を用いて求めよ. ($\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$)