§2. ベクトル値関数と行列値関数

微分積分に現れる関数は主に区間で定義された実数値関数, すなわち, $\mathbf{R}$ に値をとる関数であった. 簡単のため, 以下では１変数の場合を扱うことにしよう. すると, $\mathbf{R}$ に値をとる関数とは区間から $\mathbf{R}$ への写像のことである. ここではまず, n を２以上の自然数とし, 区間から $\mathbf{R}^n$ への写像を考えよう. これを $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数という. なお, 実数値関数をベクトル値関数と対比させてスカラー値関数ともいう.

f を区間 I で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とする. このとき, f は I で定義された n 個の実数値関数 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ を用いて

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)) \quad (t \in I) \tag{$*$}$$

と表すことができる.

g も I で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とし,

$$g(t) = (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく. $\mathbf{R}^n$ はベクトル空間であるから, I で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数 $f+g$ を

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) = (f_1(t) + g_1(t), f_2(t) + g_2(t), \ldots, f_n(t) + g_n(t)) \quad (t \in I)$$

により定めることができる. また, c を I で定義された実数値関数とすると, $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数 cf を

$$(cf)(t) = c(t)f(t) = (c(t)f_1(t), c(t)f_2(t), \ldots, c(t)f_n(t)) \quad (t \in I)$$

により定めることができる.

更に, $\mathbf{R}^n$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を用いると, I で定義された実数値関数 $\langle f, g\rangle$ を

$$\langle f, g\rangle(t) = \langle f(t), g(t)\rangle = f(t)^t g(t) \quad (t \in I)$$

により定めることができる. また, I で定義された実数値関数 $\|f\|$ を

$$\|f\|(t) = \|f(t)\| = \sqrt{\langle f(t), f(t)\rangle} \quad (t \in I)$$

により定めることができる.

$\mathbf{R}^3$ に値をとる２つのベクトル値関数に対しては外積を考えることができる. f, g を区間 I で定義された $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数とする. このとき, I で定義された $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数 $f \times g$ を

$$(f \times g)(t) = f(t) \times g(t) \quad (t \in I)$$

により定めることができる.

再び, f を区間 I で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数としよう. f が $(*)$ のように表されているとき, 各 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ が I で微分可能ならば, f は I で微分可能であるという. このとき, I で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数 f' を

$$f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), \ldots, f_n'(t)) \quad (t \in I)$$

により定め, f' を f の微分という. このように, ベクトル値関数の微分は成分毎に考えればよいのである.

問 2.1　次の (1), (2) の問に答えよ.
(1) 平均値の定理のステートメントを述べよ. (微分積分の教科書を調べよ.)
(2) f を開区間 (a, b) で微分可能な実数値関数とする. 任意の $t \in (a, b)$ に対して $f'(t) = 0$ ならば, f は定数関数であることを示せ. (平均値の定理を用いる.)

定理 2.1　f, g を区間 I で微分可能な $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル関数とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつ.
(1) $(f + g)' = f' + g'$.
(2) c を I で微分可能な実数値関数とすると, $(cf)' = c'f + cf'$.
(3) $\langle f, g\rangle' = \langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle$.
(4) $n = 3$ のとき, $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.

証明　(3) のみ示す.
f, g をそれぞれ

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)), \quad g(t) = (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておくと,

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle'(t) &= \langle f(t), g(t)\rangle' \\
&= (f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + \cdots + f_n(t)g_n(t))' \\
&= (f_1(t)g_1(t))' + (f_2(t)g_2(t))' + \cdots + (f_n(t)g_n(t))' \\
&= (f_1'(t)g_1(t) + f_1(t)g_1'(t)) + (f_2'(t)g_2(t) + f_2(t)g_2'(t)) + \cdots + (f_n'(t)g_n(t) + f_n(t)g_n'(t)) \\
&= f_1'(t)g_1(t) + f_2'(t)g_2(t) + \cdots + f_n'(t)g_n(t) + f_1(t)g_1'(t) + f_2(t)g_2'(t) + \cdots + f_n(t)g_n'(t) \\
&= \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle \\
&= \langle f', g\rangle(t) + \langle f, g'\rangle(t) \\
&= (\langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle)(t).
\end{aligned}$$

よって,

$$\langle f, g\rangle' = \langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle.$$

□

問 2.2　次の (1)〜(3) の問に答えよ.
(1) 定理 2.1 の (1) を示せ. (成分毎に考え, 微分の線形性を用いる.)
(2) 定理 2.1 の (2) を示せ. (成分毎に考え, 積の微分法を用いる.)
(3) 定理 2.1 の (4) を示せ. (成分毎に考える.)

ベクトル値関数の積分についても考えよう. f を閉区間 $[a, b]$ で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とし,

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)) \quad (t \in [a, b])$$

と表しておく. 各 f_1, f_2, ..., f_n が $[a, b]$ で積分可能なとき, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \in \mathbf{R}^n$ を

$$\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt, \int_a^b f_2(t)dt, \ldots, \int_a^b f_n(t)dt\right)$$

により定め, これを f の $[a, b]$ における定積分という. このとき, f は $[a, b]$ で積分可能であるという.

定理 2.2 f, g を閉区間 $[a,b]$ で積分可能な $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.

(1) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$

(2) $c \in \mathbf{R}$ とすると, $\displaystyle\int_a^b (cf)(t)dt = c\int_a^b f(t)dt.$

f を閉区間 $[a,b]$ で積分可能な $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とする. このとき, $[a,b]$ で定義された $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数 F を

$$F(t) = \int_a^t f(s)ds \quad (t \in [a,b])$$

により定める. これを f の不定積分という. 微分積分学の基本定理より,

$$F'(t) = f(t) \quad (t \in [a,b])$$

がなりたつ. 更に,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

がなりたつ.

問 2.3 f, g を閉区間 $[a,b]$ で積分可能な実数値関数とする. 任意の $t \in [a,b]$ に対して $f(t) \leq g(t)$ ならば,

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

がなりたち, 等号成立は $[a,b]$ 上で $f(t) = g(t)$ がなりたつときに限ることが分かる. このことを用いて, 不等式

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

を示せ. (任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して, 不等式 $t \leq |t|$, $-t \leq |t|$ がなりたつことを用いる.)

問 2.4 $\mathbf{R}$ で定義された $\mathbf{R}^2$ に値をとるベクトル値関数 f, g をそれぞれ

$$f(t) = (t, t^2), \quad g(t) = (t^3, t^4) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める.

(1) $\langle f, g' \rangle$ を求めよ. $(3t^3 + 4t^5)$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \|f\|(t)dt$ を求めよ. $(\frac{2\sqrt{2}-1}{3})$

(3) $\displaystyle\int_0^1 (f+g)(t)dt$ を求めよ. $((\frac{3}{4}, \frac{8}{15}))$

問 2.5 $\mathbf{R}$ で定義された $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数 f を

$$f(t) = (t, t^2, t^3) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定める.

(1) $f \times f'$ を求めよ. $((t^4, -2t^3, t^2))$

(2) $\langle f \times f', f'' \rangle$ を求めよ. ($2t^3$)

問 2.6 f を開区間 I で定義された微分可能なベクトル値関数とする.

(1) ある $t_0 \in I$ が存在し, I で定義された実数値関数 $\|f\|$ が $t = t_0$ で最大または最小となるならば, $f(t_0)$ と $f'(t_0)$ は直交することを示せ. (条件より, $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \|f\|^2 = 0$)

(2) $\|f\|$ が定数関数となるための必要十分条件は, 任意の $t \in I$ に対して $f(t)$ と $f'(t)$ が直交することであることを示せ. ($\|f\|^2$ の微分を計算する.)

問 2.7 f を区間 I で定義された 2 回微分可能な $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数とする. I で定義された実数値関数 $c(t)$ が存在し, 任意の $t \in I$ に対して

$$f''(t) = c(t)f(t)$$

がなりたつならば, $f \times f'$ は定ベクトル, すなわち, t に依存しないベクトルであることを示せ. ($f \times f'$ の微分を計算する.)

次に, ベクトル値関数を一般化した行列値関数, すなわち, 関数を成分とする行列について述べよう. 簡単のため, 1 変数の場合を扱うことにする.

行列値関数の微分は成分毎に考えればよい. F を区間 I で定義された行列値関数とするとき, 各成分が I で微分可能ならば, F は I で微分可能であると定めるのである. F の各成分を微分して得られる行列値関数を F' などと表す.

次の定理では行列の和や積を考えるが, そのような場合の行列の型は演算が可能なものであるとする.

定理 2.3 F, G を区間 I で微分可能な行列値関数とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつ.

(1) $(F+G)' = F' + G'$.

(2) c を I で微分可能な実数値関数とすると, $(cF)' = c'F + cF'$.

(3) $(FG)' = F'G + FG'$.

(4) F が正則行列に値をとるならば, $(F^{-1})' = -F^{-1}F'F^{-1}$.

証明 (4) のみ示す.

仮定より, 等式

$$FF^{-1} = E$$

がなりたつ. ただし, E は単位行列である.

上の式の両辺を微分すると, (3) より,

$$F'F^{-1} + F(F^{-1})' = O.$$

ただし, O は零行列である.

上の式を変形すると,

$$(F^{-1})' = -F^{-1}F'F^{-1}.$$

□

問 2.8 正則行列の定義を述べよ. (線形代数の教科書を調べよ.)

問 2.9 x, y を区間 I で微分可能な $\mathbf{R}^n$ に値をとるベクトル値関数とすると,

$$\langle x, y \rangle' = \langle x', y \rangle + \langle x, y' \rangle$$

がなりたつことを示せ. (行列の積を用いて計算すると容易である.)