§5. Euclid 空間の接ベクトル

Euclid 空間は曲がっていない真っ平らな空間であるが, 曲線や曲面などは一般には曲がった空間であると言える. そのような曲がったものを調べるために最も基本的で有効な方法は真っ平らなもので近似することである. なお, 以下では特に断らない限り, 関数や写像などは必要に応じてある程度微分可能であるとする.

例 5.1 (曲線の接線) I を区間とし, $\mathbf{R}^n$ 内の正則な曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^n$$

を考える. $t_0 \in I$ とすると, γ の $t = t_0$ における接線の径数表示は

$$l(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) \quad (t \in \mathbf{R})$$

によりあたえられ, これは $\gamma(t_0)$ を通る直線達の中で γ を $\gamma(t_0)$ の近くで最も良く近似するものである.

例 5.2 (曲面の接平面) D を uv 平面内の領域とし, 正則な曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を考える. $(u_0, v_0) \in D$ とすると, p の $p(u_0, v_0)$ における接平面は

$$\Pi = \{p(u_0, v_0) + p_u(u_0, v_0)(u - u_0) + p_v(u_0, v_0)(v - v_0) | (u, v) \in \mathbf{R}^2\}$$

によりあたえられ, これは $p(u_0, v_0)$ を通る平面達の中で p を $p(u_0, v_0)$ の近くで最も良く近似するものである.

Π は 3 次元ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ の 2 次元部分空間

$$\{p_u(u_0, v_0)u + p_v(u_0, v_0)v | (u, v) \in \mathbf{R}^2\}$$

と同一視することができる. 以下では, この部分空間も Π と表すことにする. Π の元, すなわち $p(u_0, v_0)$ における接ベクトルは, 次のようにして p 上の曲線の微分を用いても表すことができる.

p 上の曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^3$$

を

$$\gamma(t) = p(u(t), v(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく. 合成関数の微分法より,

$$\gamma' = p_u u' + p_v v'$$

だから, 特に

$$0 \in I, \ \gamma(0) = p(u_0, v_0)$$

のとき,

$$u_1 = u'(0), \ v_1 = v'(0)$$

とおくと, γ の $t = 0$ における接ベクトルは

$$\gamma'(0) = p_u(u_0, v_0)u_1 + p_v(u_0, v_0)v_1 \in \Pi$$

である.

問 5.1 m 行 n 列の実行列全体の集合を $M_{m,n}(\mathbf{R})$ と表すことにする. $M_{m,n}(\mathbf{R})$ は行列としての和およびスカラー倍により, ベクトル空間となる. 例えば, $M_{m,n}(\mathbf{R})$ の零ベクトルとは零行列 O のことである.

$A \in M_{k,l}(\mathbf{R})$, $B \in M_{m,n}(\mathbf{R})$, $C \in M_{k,n}(\mathbf{R})$ を固定しておき, $M_{l,m}(\mathbf{R})$ の部分集合 W を

$$W = \{X \in M_{l,m}(\mathbf{R}) | AXB = C\}$$

により定める. W が $M_{l,m}(\mathbf{R})$ の部分空間となるのはどのようなときかを調べよ. ($C = O$)

問 5.2 n を 2 以上の自然数とし, n 次の実正方行列全体からなるベクトル空間を $M_n(\mathbf{R})$ と表すことにする.

$M_n(\mathbf{R})$ の部分集合 W を

$$W = \{X \in M_n(\mathbf{R}) | \det X = 0\}$$

により定める. W が $M_n(\mathbf{R})$ の部分空間となるかどうかを調べよ. (部分空間ではない.)

問 5.3 W_1, W_2 をベクトル空間 V の部分空間とする.

(1) V の部分集合

$$W_1 \cap W_2 = \{x \in V | x \in W_1 \text{ かつ } x \in W_2\}$$

は V の部分空間となることを示せ. (部分空間となるための 3 つの条件を調べる.)

(2) V の部分集合 $W_1 + W_2$ を

$$W_1 + W_2 = \{x + y | x \in W_1,\ y \in W_2\}$$

により定める. $W_1 + W_2$ は V の部分空間となることを示せ. $W_1 + W_2$ を W_1 と W_2 の和空間という. (部分空間となるための 3 つの条件を調べる.)

例 5.2 のような接ベクトルは更に微分作用素というものと対応させることができる. 以下では, $\mathbf{R}^n$ の接ベクトルについて考えよう.

$p \in \mathbf{R}^n$ を固定しておき, I を 0 を含む区間とし, $\gamma(0) = p$ となる $\mathbf{R}^n$ 内の曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^n$$

を考える.

γ を

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておくと, γ の $t = 0$ における接ベクトルは

$$\gamma'(0) = (x_1'(0), x_2'(0), \ldots, x_n'(0))$$

である. 特に, 接ベクトル全体の集合は $\mathbf{R}^n$ 自身と同一視できる.

ここで, f を $\mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数とする. このとき, 合成関数の微分法より,

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

である. よって,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \gamma) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

となる．この値を $v_\gamma(f)$ と表すことにする．f から $v_\gamma(f)$ への対応を γ に沿う $t=0$ における方向微分という．また, $v_\gamma(f)$ を f の $t=0$ における γ 方向の微分係数という．$e_1, e_2, \ldots, e_n$ を $\mathbf{R}^n$ の基本ベクトルとし, $i=1,2,\ldots,n$ とすると, $\gamma'(0)=e_i$ のとき,

$$v_\gamma(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

である．

問 5.4　$\mathbf{R}^2$ で定義された実数値関数 f を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)), \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

により定める．
(1) f は $(0,0)$ で全微分可能でないことを示せ. (f が $(0,0)$ で連続でないことを示す.)
(2) $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ を固定しておく．I を 0 を含む区間とし, $\gamma(0)=(0,0)$ となる平面曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = t(a,b) \quad (t\in I)$$

により定める．$v_\gamma(f)$ の値が存在するための条件を求めよ. ($a=0$ または $b=0$)

問 5.5　$\mathbf{R}^2$ で定義された実数値関数 f を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)), \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

により定める．
(1) f は $(0,0)$ で全微分可能でないことを示せ. (f が $(0,0)$ で連続でないことを示す.)
(2) $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ を固定しておく．I を 0 を含む区間とし, $\gamma(0)=(0,0)$ となる平面曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = t(a,b) \quad (t\in I)$$

により定める．このとき, $v_\gamma(f)$ を求めよ. ($b=0$ のとき 0, $b\neq 0$ のとき $\frac{a^2}{b}$)

問 5.6　$\mathbf{R}^2$ で定義された実数値関数 f を固定しておく．I を 0 を含む区間とし, 長さ 1 の $e\in\mathbf{R}^2$ に対して $\gamma(0)=(0,0)$ となる平面曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = te \quad (t\in I)$$

により定める．e が動くとき, $v_\gamma(f)$ の最小値を求めよ. $(-\sqrt{(f_x(0,0))^2+(f_y(0,0))^2})$

次の定理が示すように, 方向微分は関数の微分と同様の性質をみたす.

定理 5.1 $a, b \in \mathbf{R}$ とし, f, g を $\mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $v_\gamma(af + bg) = av_\gamma(f) + bv_\gamma(g)$.
(2) $v_\gamma(fg) = v_\gamma(f)g(p) + f(p)v_\gamma(g)$.

証明 (1): まず,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}((af+bg)\circ\gamma) &= \frac{d}{dt}(a(f\circ\gamma) + b(g\circ\gamma)) \\ &= a\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) + b\frac{d}{dt}(g\circ\gamma).\end{aligned}$$

$t = 0$ とすると,

$$v_\gamma(af + bg) = av_\gamma(f) + bv_\gamma(g).$$

(2): 積の微分法より,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}((fg)\circ\gamma) &= \frac{d}{dt}((f\circ\gamma)(g\circ\gamma)) \\ &= \left(\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)\right)(g\circ\gamma) + (f\circ\gamma)\frac{d}{dt}(g\circ\gamma).\end{aligned}$$

$t = 0$ とすると,

$$v_\gamma(fg) = v_\gamma(f)g(p) + f(p)v_\gamma(g).$$

□

更に, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して f から $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ への対応を $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ と表すことにする. このとき,

$$v_\gamma(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) f$$

と表すことができる. よって, p における接ベクトル $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ は

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

と同一視することができる.

p における接ベクトル全体の集合を $T_p\mathbf{R}^n$ と表す. 上の同一視を用いると,

$$\begin{aligned}T_p\mathbf{R}^n &= \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}\} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \middle| a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}\right\}\end{aligned}$$

である. $T_p\mathbf{R}^n$ は自然に n 次元ベクトル空間となる. $T_p\mathbf{R}^n$ を p における接ベクトル空間または接空間という.