§6. 線形写像としての微分

1 変数関数 f の導関数 f' は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

により定められるのであった．多変数関数に対しても同じようなことが考えられるであろうか．上の式の右辺では実数 h で割るという操作を行っているので, そのまま一般化することはできない．そこで, 上の式が Landau の記号を用いて

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h) \quad (h \to 0)$$

と書き換えられることに注意しよう．すると, 問 5.4 や問 5.5 においても現れた全微分可能の概念を定めることができる．なお, ここでは全微分可能を単に微分可能ということにする．また, 簡単のため, $\mathbf{R}^n$ 全体で定義された関数の微分可能性について述べることにする．

定義 6.1 f を $\mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数とし, $p \in \mathbf{R}^n$ とする．ある n 次列ベクトル c が存在し

$$f(p+h) - f(p) = hc + o(\|h\|) \quad (h \to 0)$$

となるとき, f は p で微分可能であるという．このとき, $c = f'(p)$ と表し, これを f の p における微分係数という．

f が任意の $p \in \mathbf{R}^n$ で微分可能なとき, n 次列ベクトルに値をとるベクトル値関数 f' を f の導関数という．

注意 6.1 ここでは $\mathbf{R}^n$ の元は行ベクトルで表しているので, 定義 6.1 の c は n 次列ベクトルとなっている．

次の定理は多変数の微分積分において学ぶことである．

定理 6.1 f を $\mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数とする．f の導関数 f' が存在するならば, f は $\mathbf{R}^n$ の各座標について偏微分可能で,

$$f' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

多変数のベクトル値関数の微分についても同様に考えることができる．

定義 6.2 f を $\mathbf{R}^n$ で定義された $\mathbf{R}^m$ に値をとるベクトル値関数とし, $p \in \mathbf{R}^n$ とする．ある $n \times m$ 行列 M が存在し

$$f(p+h) - f(p) = hM + o(\|h\|) \quad (h \to 0)$$

となるとき, f は p で微分可能であるという．このとき, $M = f'(p)$ と表し, これを f の p における微分係数という．

f が任意の $p \in \mathbf{R}^n$ で微分可能なとき, $n \times m$ 行列に値をとる関数 f' を f の導関数という．

定理 6.2 f を $\mathbf{R}^n$ で定義された $\mathbf{R}^m$ に値をとるベクトル値関数とし,

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

と表しておく. f の導関数 f' が存在するならば, f は $\mathbf{R}^n$ の各座標について偏微分可能で,

$$f' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

定理6.2の f' を表す右辺を Jf とも表し, Jacobi行列という. $n = m$ のとき, Jf は正方行列に値をとり, その行列式は重積分に対する変数変換公式に現れるJacobianとなる. なお, ここで定めたJacobi行列は§4において曲面に対して定めたものと転置だけ異なるが, Jacobi行列について問題となるのは, その階数や正方行列の場合は正則性や行列式であることを注意しておこう.

問 6.1 A を $n \times m$ 行列, $b \in \mathbf{R}^m$ とし, $\mathbf{R}^n$ で定義された $\mathbf{R}^m$ に値をとるベクトル値関数 f を

$$f(x) = xA + b \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める. f のJacobi行列を求めよ. (A)

問 6.2 $[0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbf{R}$ で定義された $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数 f を

$$f(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \quad ((r, \theta, z) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbf{R})$$

により定める. このとき, (r, θ, z) を用いて $\mathbf{R}^3$ の点を表すことができる. (r, θ, z) を円柱座標という.

(1) f のJacobi行列を求めよ. $\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

(2) f のJacobianを求めよ. (r)

問 6.3 Oを $\mathbf{R}^3$ の原点とする. $\mathrm{P}(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ とし, 線分OPの長さを r とおく. 次に, z 軸とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とのなす角を θ とおく. 更に, Pの xy 平面への射影をQとし, x 軸とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とのなす角を φ とおく. ただし, θ, φ はそれぞれ $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ の範囲に選んでおく. このとき,

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

がなりたつ. (r, θ, φ) を空間極座標という.

空間極座標を用いて, $[0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ で定義された $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数 f を

$$f(r, \theta, \varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \quad ((r, \theta, \varphi) \in [0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi])$$

により定める.

(1) f のJacobi行列を求めよ. $\left(\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}\right)$

(2) f のJacobianを求めよ. $(r^2\sin\theta)$

Jacobi 行列は次のようにして, $\mathbf{R}^n$ の接空間から $\mathbf{R}^m$ の接空間への線形写像を表す行列と考えることができる. すなわち, $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への微分可能な写像に対して, $\mathbf{R}^n$ の接空間から $\mathbf{R}^m$ の接空間への線形写像が対応するのである.

問 6.4 線形写像の定義を述べよ. (線形代数の教科書を調べよ.)

$p \in \mathbf{R}^n$ を固定しておき, I を 0 を含む区間とする. また, $\gamma(0) = p$ となる $\mathbf{R}^n$ 内の曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^n$$

を

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく. §5 において扱ったように, このとき p における接ベクトル

$$v_\gamma = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

を対応させることができる.

ここで, f を $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への微分可能な写像とし, $q = f(p)$ とおく. このとき, $\mathbf{R}^m$ 内の曲線

$$f \circ \gamma : I \to \mathbf{R}^m$$

を考えると,

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)(0) &= f(\gamma(0)) \\ &= f(p) \\ &= q\end{aligned}$$

である. 更に, $f \circ \gamma$ から定まる接ベクトル $v_{f \circ \gamma}$ を求めてみよう. f および $f \circ \gamma$ をそれぞれ

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m),$$

$$(f \circ \gamma)(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく. $j = 1, 2, \ldots, m$ とすると, 合成関数の微分法より,

$$\begin{aligned}\frac{dy_j}{dt} &= \frac{d}{dt} f_j(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}\end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{aligned}v_{f \circ \gamma} &= \sum_{j=1}^{m} y_j'(0) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_q \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_q\end{aligned}$$

となる. 特に, v_γ から $v_{f \circ \gamma}$ への対応は $T_p\mathbf{R}^n$ から $T_q\mathbf{R}^m$ への線形写像を定める. これを $(df)_p$ と表すことにする.

$T_p\mathbf{R}^n$, $T_q\mathbf{R}^m$ の基底として, それぞれ

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right\}, \ \left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_q, \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_q, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_q\right\}$$

を選んでおき, この基底に関する $(df)_p$ の表現行列を A とする. ただし, ここでは

$$\begin{pmatrix} (df)_p\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_p\right) \\ (df)_p\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)_p\right) \\ \vdots \\ (df)_p\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial}{\partial y_1}\right)_q \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial y_2}\right)_q \\ \vdots \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial y_m}\right)_q \end{pmatrix}$$

をみたす A を表現行列の定義とする. このとき, 上の計算より, A はまさに f の p における Jacobi 行列 $(Jf)(p)$ に他ならない.

最後に多変数ベクトル値関数に対する連鎖律, すなわち合成関数の微分法について述べておこう.

定理 6.3 (連鎖律) f を $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への微分可能な写像, g を $\mathbf{R}^m$ から $\mathbf{R}^l$ への微分可能な写像とする. $p \in \mathbf{R}^n$ とすると,

$$(d(g \circ f))_p = (dg)_{f(p)} \circ (df)_p.$$

定理 6.3 において, $T_p\mathbf{R}^n$, $T_{f(p)}\mathbf{R}^m$ の基底を上のように選んでおき, $\mathbf{R}^l$ の座標を $(z_1, z_2, \ldots, z_l)$ とし, $T_{(g\circ f)(p)}\mathbf{R}^l$ の基底を

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)_{(g\circ f)(p)}, \left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)_{(g\circ f)(p)}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial z_l}\right)_{(g\circ f)(p)}\right\}$$

と選んでおくと, 連鎖律は Jacobi 行列を用いて,

$$(J(g \circ f))(p) = (Jf)(p)(Jg)(f(p))$$

と表されることが分かる. これを更に具体的に表すと, 微分積分において学ぶ合成関数の微分法に現れる式が得られる.

問 6.5 関数 $z = f(x, y)$ と極座標変換

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

の合成関数を考える. 次の (1)〜(3) がなりたつことを示せ.

(1) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = r\dfrac{\partial z}{\partial r}$. (合成関数の微分法を用いる.)

(2) $x\dfrac{\partial z}{\partial y} - y\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial \theta}$. (合成関数の微分法を用いる.)

(3) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$. ((1), (2) を用いる.)