§7. Euclid 空間の変換

集合 X から X 自身への全単射を X の変換ともいう．ここでは, $\mathbf{R}^n$ の変換としてよく知られているアファイン変換, 等積アファイン変換, 合同変換の 3 つについて述べよう．

問 7.1　X, Y を集合, f を X から Y への写像とする．
(1) f が全射であることの定義を述べよ. (集合論の教科書を調べよ.)
(2) f が単射であることの定義を述べよ. (集合論の教科書を調べよ.)

まず, $\mathbf{R}^n$ のアファイン変換を次のように定義しよう．

定義 7.1　f を $\mathbf{R}^n$ の変換とする．f は次の (1), (2) をみたすとき, アファイン変換という．

(1) f は任意の直線を直線へ写す．
(2) f は任意の線分の内分比を保つ．

アファイン変換の定義においては, $\mathbf{R}^n$ の内積は必要としないことを注意しておこう．アファイン変換の定義より, 次がなりたつ．

定理 7.1　f, g, h を $\mathbf{R}^n$ のアファイン変換とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつ．
(1) g と f の合成写像 $f \circ g$ は $\mathbf{R}^n$ のアファイン変換.
(2) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ (結合律).
(3) $\mathbf{R}^n$ の恒等変換 $1_{\mathbf{R}^n}$ はアファイン変換で, $1_{\mathbf{R}^n} \circ f = f \circ 1_{\mathbf{R}^n} = f$.
(4) f の逆写像 f^{-1} は $\mathbf{R}^n$ のアファイン変換で, $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = 1_{\mathbf{R}^n}$.

一般の集合に対しても, 定理 7.1 の (1)〜(4) のような性質をもつ積を演算として考えると, 群というものを定義することができる．$\mathbf{R}^n$ のアファイン変換全体の集合に写像の合成を積として考えたものをアファイン変換群という．

問 7.2　次の (1)〜(3) の問に答えよ．
(1) 群の定義を述べよ. (群論の教科書を調べよ.)
(2) n 次の実正則行列全体の集合を $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ と表す．$\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は行列の積に関して群となることを示せ．$\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ を n 次の実一般線形群という. (群の定義を確認する.)
(3) 行列式が 1 の n 次の実正方行列全体の集合を $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ と表す．$\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ は行列の積に関して群となることを示せ．$\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ を n 次の実特殊線形群という. (群の定義を確認する.)

注意 7.1　行列の成分を複素数としても, 問 7.2 の (2), (3) と同様の事実がなりたつ．n 次の複素正則行列全体の集合, 行列式が 1 の n 次の複素正方行列全体の集合をそれぞれ $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$ と表し, n 次の複素一般線形群, 複素特殊線形群という．

アファイン変換を行列を用いて具体的に表すことを考えよう．

問 7.3　f を $\mathbf{R}^n$ のアファイン変換とし, $\mathbf{R}^n$ の変換 g を

$$g(x) = f(x) - f(0) \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める．
(1) g は任意の $c \in \mathbf{R}$ および任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して,

$$g(cx) = cg(x)$$

をみたすことを示せ. ($c \neq 0, 1$, $x \neq 0$ のときは 3 点 $0, x, cx$ を考えよ.)

(2) g は任意の $x, y \in \mathbf{R}^n$ に対して,

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

をみたすことを示せ. ($x \neq y$ のときは 3 点 $x, \frac{x+y}{2}, y$ を考えよ.)

問 7.3 より, アファイン変換は次のように表すことができる.

定理 7.2 f を $\mathbf{R}^n$ のアファイン変換とする. このとき, $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ および $b \in \mathbf{R}^n$ が存在し, 任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$f(x) = xA + b. \qquad (*)$$

問 7.4 定理 7.2 を示せ. (A が正則であることを示すためには逆写像を考えよ.)

逆に, $(*)$ により定められる f はアファイン変換であることも分かる. なお, $(*)$ において A が正則でない場合も f をアファイン変換ということがある.

問 7.5 次の問に答えよ.
(1) $(*)$ により定められる f は定義 7.1 の (1) をみたすことを示せ. (直線の方程式を f で写す.)
(2) $(*)$ により定められる f は定義 7.1 の (2) をみたすことを示せ. (内分点を表す式を用いる.)

次に, $\mathbf{R}^n$ の等積アファイン変換について述べよう.

定義 7.2 f を $\mathbf{R}^n$ の変換とする. f は定義 7.1 の (1), (2) をみたし, 任意の体積確定な有界集合の体積を保つとき, 等積アファイン変換という.

$\mathbf{R}^n$ の等積アファイン変換についても定理 7.1 と同様の性質がなりたち, $\mathbf{R}^n$ の等積アファイン変換全体の集合に写像の合成を積として考えたものは群となる. これを等積アファイン変換群という.

等積アファイン変換を行列を用いて具体的に表すことを考えよう. V を $\mathbf{R}^n$ の体積確定な有界集合とする. このとき, 定数関数 1 は V で積分可能で, V の体積は積分

$$\int_V dx$$

の値である. なお, 積分の定義においては, $\mathbf{R}^n$ の内積は必要としないことを注意しておこう.

ここで, W も $\mathbf{R}^n$ 内の体積確定な有界集合とし, C^1 級の変数変換 $x = f(y)$ により, W は V へ写されるとする. このとき, V で連続な実数値関数 φ に対して, 変数変換公式

$$\int_V \varphi(x)dx = \int_W (\varphi \circ f)(y) \left|\det(Jf)(y)\right| dy$$

がなりたつ. 変数変換公式において, f を $(*)$ により定められるアファイン変換とし, φ を定数関数 1 としよう. 問 6.1 より, f の Jacobi 行列は A であるから,

$$\int_V dx = \int_W |\det A| dy$$

がなりたつ. さらに, 積分の性質より, 次がなりたつことが分かる.

定理 7.3 f を $\mathbf{R}^n$ の等積アファイン変換とする. このとき, 行列式が 1 または -1 の n 次の実正方行列 A および $b \in \mathbf{R}^n$ が存在し, 任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$f(x) = xA + b.$$

なお, 定理 7.3 において, $\det A = 1$ の場合の f のみを等積アファイン変換ということもある.

最後に, $\mathbf{R}^n$ の合同変換について述べよう. 合同変換の定義においては, $\mathbf{R}^n$ のユークリッド距離 d を用いる.

定義 7.3 f を $\mathbf{R}^n$ の変換とする. f は任意の 2 点の Euclid 距離を保つとき, 等長変換または合同変換という.

アファイン変換, 等積アファイン変換の場合と同様に, $\mathbf{R}^n$ の合同変換全体の集合は群となる. これを合同変換群という.

合同変換を行列を用いて具体的に表すために, まず直交行列について述べておこう.

定義 7.4 A を n 次の実正方行列とする. A は

$$^tAA = A^tA = E$$

をみたすとき, 直交行列という. ただし, E は n 次の単位行列である.

なお, 直交行列を定義する式は $^tAA = E$ または $A^tA = E$ の何れか 1 つのみでもよい.

問 7.6 A, B を n 次の直交行列とする. このとき, A と B の積 AB も直交行列であることを示せ. ($^t(AB)(AB) = E$ を示す.)

直交行列の定義から直ちに分かるように, 直交行列は正則で, その逆行列は転置行列に一致する. また, 直交行列の逆行列も直交行列である. よって, 問 7.6 と合わせて, n 次の直交行列全体の集合は行列の積に関して群となる. これを $\mathrm{O}(n)$ と表し, n 次の直交群という.

問 7.7 次の (1), (2) の問に答えよ.

(1) 直交行列の行列式は 1 か -1 であることを示せ. ($^tAA = E$ の両辺の行列式をとる.)

(2) 行列式が 1 の n 次の直交行列全体の集合を $\mathrm{SO}(n)$ と表す. $\mathrm{SO}(n)$ は行列の積に関して群となることを示せ. $\mathrm{SO}(n)$ を n 次の特殊直交群という. (群の定義を確認する.)

問 7.8 次の (1), (2) の問に答えよ.

(1) $\mathrm{O}(2)$ の元を具体的に表せ. ($\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \mp\sin\theta & \pm\cos\theta \end{pmatrix}$)

(2) $\mathbf{R}^2$ の点に $\mathrm{O}(2)$ の元を掛けることの意味を説明せよ. (回転や対称移動の言葉で説明する.)

次の定理が示すように, 直交行列に対する条件は様々な形に言い替えることができる.

定理 7.4 A を n 次の実正方行列とすると, 次の (1)〜(4) は同値.

(1) $A \in \mathrm{O}(n)$.

(2) 任意の $x, y \in \mathbf{R}^n$ に対して $\langle xA, yA \rangle = \langle x, y \rangle$.

(3) 任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して $\|xA\| = \|x\|$.

(4) A の n 個の行ベクトルは $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底.

問 7.9 次の (1)〜(5) の問に答えよ.

(1) 定理 7.4 において, (1) $\Rightarrow$ (2) を示せ. (問 1.3 を用いると容易である.)

(2) 定理 7.4 において, (2) $\Rightarrow$ (1) を示せ. (x, y を $\mathbf{R}^n$ の基本ベクトルとする.)

(3) 定理 7.4 において, (2) $\Rightarrow$ (3) を示せ. (ノルムの定義を用いる.)

(4) 定理 7.4 において, (3) $\Rightarrow$ (2) を示せ. (問 1.7 を用いる.)

(5) 定理 7.4 において, (1) $\Leftrightarrow$ (4) を示せ. (A をブロック分割する.)

それでは, 合同変換を行列を用いて具体的に表すことを考えよう.

問 7.10 f を $\mathbf{R}^n$ の合同変換, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ を $\mathbf{R}^n$ の基本ベクトルとし, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $a_i \in \mathbf{R}^n$ を

$$a_i = f(e_i) - f(0) \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める.

(1) $\|a_i\| = 1$ であることを示せ. (合同変換の定義を用いる.)

(2) $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ のとき,

$$\langle a_i, a_j \rangle = 0$$

であることを示せ. (問 1.7 を用いる.)

(3) (1), (2) より, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ は $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底で, $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ とおくと, 定理 7.4 より, A は直交行列である. このとき, $\mathbf{R}^n$ の変換 g を

$$g(x) = xA + f(0) \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める. g は合同変換であることを示せ. (問 1.3 を用いると容易である.)

(4) $x \in \mathbf{R}^n$ を

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad (x_i \in \mathbf{R})$$

と表しておき,

$$y = (g^{-1} \circ f)(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \quad (y_i \in \mathbf{R})$$

とおく. このとき,

$$d(x, 0)^2,\ d(y, 0)^2,\ d(x, e_i)^2,\ d(y, e_i)^2$$

を計算せよ. ($\|x\|^2$, $\|y\|^2$, $\|x\|^2 - 2x_i + 1$, $\|y\|^2 - 2y_i + 1$)

問 7.10 の (4) において, $g^{-1} \circ f$ は

$$(g^{-1} \circ f)(0) = 0, \quad (g^{-1} \circ f)(e_i) = e_i, \quad (g^{-1} \circ f)(x) = y$$

をみたす合同変換であることに注意すると, $\|x\|^2 = \|y\|^2$ となり, 更に $x_i = y_i$ となるから, $g^{-1} \circ f$ は $\mathbf{R}^n$ の恒等変換となる. よって, $f = g$ となり, 次が示された.

定理 7.5 f を $\mathbf{R}^n$ の合同変換とする. このとき, $A \in \mathrm{O}(n)$ および $b \in \mathbf{R}^n$ が存在し, 任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$f(x) = xA + b.$$

なお, 定理 7.5 において, $\det A = 1$ の場合の f のみを合同変換ということもある. また, 合同変換の定義は定義 7.3 の代わりにノルムまたは内積を保つ $\mathbf{R}^n$ の変換としてもよいことが分かる.